微分積分Ⅱ（ppfcj2o）　担当教員：西沢 望 （S-305）：nishizawa.nozomi@kitasato-u.ac.jp

第 10 回　1 階常微分方程式（1）

今回のポイント

1. 微分方程式とは
2. 直接積分形
3. 変数分離形

微分方程式

➢ 微分方程式とは

方程式

$x^2+3x-4=0$

$\rightarrow \quad x=1,-4$ (解)

⇨　未知の数xを求める。

微分方程式

$\dfrac{dy}{dx}=2x-5$

$\rightarrow \quad \underline{y=x^2-5x+C \quad (C\text{は任意定数})}$ ⋯（一般解）

⇨　未知の関数xを求める。

初期条件（境界条件）を与えられれば、Cは一意に決まり、$y(0)=0$ とすれば、$C=0$ となるので

$\underline{y=x^2-5x}$ ⋯（特殊解（特解））

また、任意定数にどのような値を入れても得られない解があれば、そのような特異解という。

物理現象の多くは微分方程式で書き表される。

（例）空気抵抗のある自由落下運動

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-mg-b\frac{dx}{dt}$$

（例）ばね振動

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-b\frac{dx}{dt}+F_0\cos\Omega t$$

➢ 微分方程式の分類と種類

$\underbrace{\text{定数係数}}_{⑤}\ \underbrace{\text{2 階}}_{①}\ \underbrace{\text{同次}}_{②}\ \underbrace{\text{線形}}_{③}\ \underbrace{\text{常微分方程式}}_{④}$

①階数　②同次、非同次　③線形、非線形　④常微分、偏微分　⑤定数係数

① 階数

微分階数の最高階数

（一般解に含まれる任意定数の数に一致）

$\frac{dx}{dt}=t$ ：1 階、　$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}=-x$ ：2 階、　$\frac{d^4x}{dt^4}+\frac{d^2x}{dt^2}=0$ ：4 階

② 同次、非同次（斉次、非斉次）

定数項を含むかどうか

（左辺に関数を含む項を移行したときに右辺が 0 ならば同次、≠0 なら非同次）

$\frac{d^4x}{dt^4}+\frac{d^2x}{dt^2}=0$ ：同次（斉次）、　$\frac{dx}{dt}=t$ ：非同次（非斉次）

③ 線形、非線形

1 次の和のみで構成されているかどうか

$\frac{dx}{dt}=x$ ：線形、$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}=x$: 線形、

$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=x$ ：非線形、$\frac{d^2x}{dt^2}+x\frac{dx}{dt}=x$: 非線形

④ 常微分、偏微分

1 変数関数の微分のみで構成されている： 常微分

多変数関数の微分が含まれる　　　　　： 偏微分

⑤ 定数係数

2 階同次線形常微分方程式において

$$\frac{d^2x}{dt^2}+P(t)\frac{dx}{dt}+Q(t)x=0$$

と書かれたとき、$P(t), Q(t)$ がtによらない定数の場合を指す。

さらに連立微分方程式もあるが、それについては「物理数学Ⅰ」で扱う。

1 階常微分方程式では

- 直接積分形（基本）
- 変数分離形 → 同次形

  (1) $X=h(x), Y=k(y)$ パターン

  (2) $y'=f(ax+by+c)$ パターン　　　（ここまで今回）

- 完全微分方程式 → 積分因子
- 1 階線形微分方程式（斉次→ 非斉次）→ベルヌーイの微分方程式

（これらは次回以降）

➢ 直接積分形

直接積分形

$\dfrac{dy}{dx} = f(x)$ の形の微分方程式を**直接積分形**といい、

その一般解は、 $y = \int f(x)\,dx = F(x) + C \quad (C\text{: 任意定数})$

例題 1.1

初期条件 $y(0) = 0$ を満たす $y' = \cos x$ の解を求めよ。

$\dfrac{dy}{dx} = \cos x$ 　　より

$$y = \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

となる。初期条件 $y(0) = 0$ のとき、$C = 0$ だから

$$\underline{y = \sin x}$$

例

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{1 + x^2}$ の一般解を求めよ。また、初期条件 $y(0) = 1$ のとき特解を求めよ。

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{1 + x^2}$ 　　より

$$y = \int \frac{x}{1 + x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1 + x^2}\,dx = \frac{1}{2}\log(1 + x^2) + C$$

となる。初期条件 $y(0) = 1$ のとき、

$$y(0) = \frac{1}{2}\log(1 + 0^2) + C = 1$$

より $C = 1$. よって、特解は

$$\underline{y = \frac{1}{2}\log(1 + x^2) + 1}$$

変数分離形

直接積分形

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = X(x)\cdot Y(y)}$$ の形の微分方程式を**変数分離形**といい、

その一般解は次のように求める。$Y(y) \neq 0$ のとき、

$$\frac{1}{Y(y)}\cdot dy = X(x)\cdot dx$$

として、この両辺を積分して求める。

$Y(y) = 0$ となる y_0 があれば、$y = y_0$ も解となる。このとき、$y = y_0$ は一般解に含まれることもあるし、特異解の場合もある。

例題 1.2

$\boldsymbol{y' = -xy}$ の一般解を求めよ。

$y = 0$ は明らかに解である。$y \neq 0$ のとき、$x\frac{dy}{dx} = y$ 　より

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\log|y| = -\frac{1}{2}x^2 + C'$$

$$\therefore \underline{y = Ce^{-\frac{1}{2}x^2},\ \ y = 0}$$

例

$\boldsymbol{x\frac{dy}{dx} = y}$ の一般解を求めよ。また、初期条件 $\boldsymbol{y(1) = 2}$ のとき特解を求めよ。

$x = 0$ のとき、$y = 0$で与式を満たす。また、$y = 0$ のとき、$y' = 0$ で$y = 0$ も与式を満たす。

$x \neq 0, y \neq 0$ のとき、　$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\log|y| = \log|x| + C'$$

$$|y| = C|x|$$

$$\therefore \underline{y = Cx}$$

$x=0, y=0$ も解であるが、$C=0$ として得られるので特異解ではない。

$y(1)=2$ より $C=2$ なので、特殊解は $\underline{y=2x}$

➢ 同次形

同次形

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$ の形の微分方程式を**同次形**といい、変数分離形に帰着して解く

その一般解は次のように求める。

$\frac{y}{x}=u$ とおくと、$y=ux$両辺をx で微分すると、

$$\frac{dy}{dx}=u\cdot\frac{dx}{dx}+\frac{du}{dx}\cdot x=u+x\frac{du}{dx}$$

よって、これをもとの式に代入すると、

$$u+x\frac{du}{dx}=f(u)$$

$$\frac{1}{f(u)-u}du=\frac{1}{x}dx$$

$$\int\frac{1}{f(u)-u}du=\int\frac{1}{x}dx$$

これを解いて、uとxの関係式を求めて、最後に $u=y/x$ を代入して一般解を求める。

例題 1.3

$y'=\left(\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{y}{x}\right)$ の一般解を求めよ。

$$\frac{y}{x}=u \text{ とおくと、} \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$$

よって、

$$u+x\frac{du}{dx}=u^2+u$$

$$\frac{1}{u^2}du=\frac{1}{x}dx$$

$$\int\frac{1}{u^2}du=\int\frac{1}{x}dx$$

$$-\frac{1}{u}=\log|x|+C \quad (C\text{: 任意定数})$$

$$-\frac{x}{y} = \log|x| + C \qquad \therefore \underline{y = -\frac{x}{\log|x| + C}}$$

例

$\boldsymbol{y' = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}}$ $(\boldsymbol{x \neq 0,\ \ y \neq 0})$ **の一般解を求めよ。また、初期条件** $\boldsymbol{y(1) = -1}$ **のとき特解を求めよ。**

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2x^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2$$

$$\frac{y}{x} = u \text{ とおくと、} \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

以上より

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}u^2$$

$$\frac{2}{(u-1)^2}du = \frac{1}{x}dx$$

$$\int \frac{2}{(u-1)^2}du = \int \frac{1}{x}dx$$

$$-2(u-1)^{-1} = \log|x| + C \quad (C\text{: 任意定数})$$

$$-2\frac{1}{\frac{y}{x} - 1} = \log|x| + C$$

$$\frac{y}{x} - 1 = \frac{-2}{\log|x| + C} \qquad \left(\text{ただし、} x \neq 0,\ \ x \neq e^{-C}\right)$$

$$\therefore \underline{y = x - \frac{2x}{\log|x| + C}}$$

$y(1)$ のとき、$C = 1$ であるから、

$$\underline{y = x - \frac{2x}{\log|x| + 1} \quad \left(\text{ただし、} x \neq 0,\ \ x \neq e^{-1}\right)}$$

➢ <u>$\boldsymbol{X = h(x), Y = k(y)}$ **パターン**</u>

$X = h(x), Y = k(y)$ とおくと、同次形に帰着できることがある。

例題 1.4

$\boldsymbol{y' = \dfrac{x+y+3}{x+1}}$ **の一般解を求めよ。**

$$y' = \frac{x+y+3}{x+1} = 1 + \frac{y+2}{x+1}$$

より、$X = x+1, Y = y+2$ とおくと、

$$\frac{dY}{dX} = 1 + \frac{Y}{X}$$

となるので、$\frac{Y}{X} = Z$ とおくと、$\frac{dY}{dX} = Z + X\frac{dZ}{dX}$ であるから、

$$Z + X\frac{dZ}{dX} = 1 + Z$$

$$dZ = \frac{1}{X}dX$$

$$\int dZ = \int \frac{1}{X}dX$$

$$Z = \log|X| + C \quad (C:\text{任意定数})$$

$$\frac{Y}{X} = \log|X| + C$$

$$\frac{y+2}{x+1} = \log|x+1| + C \qquad \therefore \underline{y = (x+1)\{\log|x+1| + C\} - 2}$$

- <u>$\boldsymbol{y' = f(ax+by+c)}$ パターン</u>

$\frac{dy}{dx} = f(ax+by+c)$　$(a, b, c:\text{定数})$ の形では $ax+by+c = u$ とおくと、同次形に帰着できる。

$\boxed{\text{例}}$

$\boldsymbol{y' = (4x+y+1)^2}$ **の一般解を求めよ。**

$4x+y+1 = u$ とおく。両辺を x で微分すると、

$$4 + \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 4$$

よって、

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-4=u^2$$

あとは、変数分離形と同じ。

$$\frac{1}{u^2+4}du=dx$$

$$\int\frac{1}{u^2+4}du=\int dx$$

$$\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{u}{2}=x+C'$$

$$\frac{u}{2}=\tan(2x+C)$$

$$\frac{4x+y+1}{2}=\tan(2x+C)\qquad\therefore\ \underline{y=2\tan(2x+C)-4x-1}$$

例

$y'=-\dfrac{x+y+1}{x+y-1}$ の一般解を求めよ。

$x+y=u$ とおく。両辺をx で微分すると、

$$1+\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-1$$

一方、与式は

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{u+1}{u-1}$$

よって、

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-1=-\frac{u+1}{u-1}$$

$$(u-1)du=-2dx$$

$$\int(u-1)\,du=-2\int dx$$

$$\frac{1}{2}u^2-u=-2x+C'$$

$$\frac{1}{2}(x+y)^2-(x+y)=-2x+C'$$

$$\therefore\ \underline{x^2+2xy+y^2+x-y=C}$$

【問題集】

次の微分方程式の一般解および特異解を求めよ。また、初期条件が与えられているものは特解も求めよ。

➢ 直接積分形

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{x^2+4}$　　初期条件：$y(2) = 1 - \dfrac{\pi}{2}$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}}$　　初期条件：$y(0) = 1$

➢ 変数分離形

(1) $y' = -3y$

(2) $y' = 2xy^2$

(3) $y' = (x+1)(y+2)$

(4) $y' = 4y$

(5) $y' = e^{x-y}$

(6) $y' = xy$

(7) $xy' + y = y^2$

(8) $y' = e^{x+y}$

(9) $y' = ay(1-y)$　(aは実数)

(10) $y' = 1 + y^2$

(11) $y' \tan x = \dfrac{1}{\tan y}$

(12) $\sqrt{1-x^2}y' + \sqrt{1-y^2} = 0$　$(-1 < x < 1, -1 < y < 1)$初期条件：$y\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(13) $(1-x)y' = y - 1$　$(x \neq 1, y \neq 1)$　　初期条件：$y(2) = 2$

(14) $x\sqrt{x-1} \cdot y' = 1 + y^2$　$(x \neq 0, x \neq 1)$　　初期条件：$y(2) = \sqrt{3}$

同次形

(1) $xy' = 2x + y$

(2) $x^2y' = y^2 - xy$

(3) $xy' = x + y$

(4) $x^2y' + y^2 = 0$

(5) $y' = \dfrac{y}{x+y}$

(6) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$

(7) $y' = \dfrac{(x+y)^2}{xy}$

(8) $(2xy - x^2)y' + y^2 - 2xy = 0$

(9) $x^2 + y^2 = 2xyy'$

(10) $\left(x\cos\dfrac{y}{x} + y\sin\dfrac{y}{x}\right)y + \left(x\cos\dfrac{y}{x} - y\sin\dfrac{y}{x}\right)xy' = 0$

(11) $xy' = y + \sqrt{x^2+y^2}\ \ (x \neq 0)$

(12) $xyy' + y^2 + x^2 = 0\ \ (x \neq 0)$　初期条件：$y(1) = 1$

$X = h(x), Y = k(y)$ パターン

(1) $y' = \dfrac{2x+y+2}{x+1}$

(2) $(x+1)y' = x + 2y + 3$

$y' = f(ax + by + c)$ パターン

(1) $y' = \sqrt{2x+y-1}$　初期条件：$y(2) = 1$

(2) $y' = -\dfrac{x+y+2}{2x+2y+5}$

(3) $y' = \dfrac{1}{x+y+1}$

変数分離形の応用

(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-y+1}{x-2y+1}\ \left(x\neq-\dfrac{1}{3}\right)\cdots$① について

$2x-y+1=0,\quad x-2y+1=0$ の解を、$x=\alpha,\ \ y=\beta$ とおくとき、

$u=x-\alpha,\ \ v=y-\beta$ とおいて①の一般解を求めよ。

(2) $y'=\dfrac{2x-y+3}{x-2y+3}$ （前問と同様の手法を用いてよい）

(3) $y'=\dfrac{x-2y+3}{2x+y-1}$ （前問と同様の手法を用いてよい）

【解答】

➢ 直接積分形

キャンパス・ゼミ 常微分方程式 P.14 演習問題 1, 実践問題 1

(1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{x^2+4}$　　初期条件：$y(2)=1-\frac{\pi}{2}$

$$\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{x^2+4}=\frac{x^2+4-4}{x^2+4}=1-\frac{4}{x^2+4}$$

$$y=\int\frac{x^2}{x^2+4}dx=\int\left\{1-\frac{4}{x^2+4}\right\}dx=x-4\cdot\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}+C$$

∴ 一般解は、$\underline{y=x-2\tan^{-1}\frac{x}{2}+C}$

$$y(2)=2-2\tan^{-1}\frac{2}{2}+C=1-\frac{\pi}{2}$$

$$2-2\cdot\frac{\pi}{4}+C=1-\frac{\pi}{2}\qquad\therefore C=-1$$

∴ 特殊解は、$\underline{y=x-2\tan^{-1}\frac{x}{2}-1}$

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}}$　　初期条件：$y(0)=1$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx=\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}}=1-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$y=\int\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int\left\{1-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right\}dx=x-\log\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C$$

∴ 一般解は、$\underline{y=x-\log\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C}$

$$y(0)=0-\log\left|0+\sqrt{0^2+1}\right|+C=1\qquad\therefore C=1$$

∴ 特殊解は、$\underline{y=x-\log\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+1}$

➢ 変数分離形

教科書 P.6 問題 2

(1) $y'=-3y$

$$\frac{dy}{dx} = -3y$$

より、$y = 0$ のとき、明らかに解である。$y \neq 0$ のとき、

$$\frac{dy}{y} = -3dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = -3 \int dx$$

$$\log|y| = -3x + C'$$

$$\therefore \underline{y = Ce^{-3x}, \ \left(C = 0 \text{ とすれば } y = 0 \text{ は含まれる}\right)}$$

(2) $y' = 2xy^2$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2$$

より、$y = 0$ のとき、明らかに解である。$y \neq 0$ のとき、

$$\frac{dy}{y^2} = 2xdx$$

$$\int \frac{1}{y^2} dy = 2 \int x\,dx$$

$$-\frac{1}{y} = x^2 + C$$

$$\therefore \underline{y = \frac{-1}{x^2 + C}, \ \ y = 0}$$

(3) $y' = (x+1)(y+2)$ 　**演習に出題**

$$\frac{dy}{dx} = (x+1)(y+2)$$

より、$y = -2$ は明らかに解である。$y \neq -2$ のとき、

より $$\frac{dy}{y+2} = (x+1)dx$$

$$\int \frac{1}{y+2} dy = \int (x+1)\,dx$$

$$\log|y+2| = \frac{x^2}{2} + x + C'$$

$$\therefore \underline{y = Ce^{\frac{x^2}{2}+x} - 2, \quad \left(C = 0 \text{ とすれば } y = -2 \text{ は含まれる}\right)}$$

教科書 P.12 演習問題［2］

(4) $y' = 4y$ (レポートに出題)

$$\frac{dy}{dx} = 4y \quad \text{より} \quad \frac{dy}{y} = 4dx$$

より、$y = 0$ は明らかに解である。$y \neq 0$ のとき、

$$\int \frac{1}{y} dy = 4 \int dx$$

$$\log|y| = 4x + C'$$

$$\therefore \underline{y = Ce^{4x}, \quad \left(C = 0 \text{ とすれば } y = 0 \text{ は含まれる}\right)}$$

(5) $y' = e^{x-y}$ (レポートに出題)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^y} \quad \text{より} \ e^y dy = e^x dx$$

$$e^y = e^x + C$$

$$\therefore \underline{y = \log(e^x + C)}$$

(6) $y' = xy$ (レポートに出題)

$$\frac{dy}{dx} = xy$$

より、$y = 0$は明らかに解である。$y \neq 0$ のとき、

$$\frac{dy}{y} = xdx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int x\,dx$$

$$\log|y| = \frac{x^2}{2} + C'$$

$$\therefore \underline{y = Ce^{\frac{x^2}{2}}, \quad \left(C = 0 \text{ とすれば } y = 0 \text{ は含まれる}\right)}$$

チャート微分積分 P.349 基本例題 161

(7) $xy' + y = y^2$

$$x\frac{dy}{dx} + y = y^2$$

より、$y = 0, y = 1$は明らかに解である。$y \neq 0, y \neq 1$ のとき、

$$\frac{dy}{(y-1)y} = \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{1}{(y-1)y} dy = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\int\left\{\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y}\right\}dy=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\log|y-1|-\log|y|=\log|x|+C'$$

$$\log\left|\frac{y-1}{xy}\right|=C'$$

$$\frac{y-1}{xy}=\pm e^{C'}$$

$$y=\frac{1}{1\mp e^{C'}x}$$

$$\therefore \underline{y=\frac{1}{Cx+1},\quad y=0,\left(C=0\text{とすれば } y=1\text{ は含まれる}\right)}$$

(8) $y'=e^{x+y}$

$$\frac{dy}{dx}=e^xe^y \qquad \text{より}\ \ e^{-y}dy=e^xdx$$

$$-e^y=e^x+C'$$

$$\therefore \underline{y=\log(-e^x+C)}$$

チャート微分積分 P.373 重要例題 098

(9) $y'=ay(1-y)$ （aは実数）

$$\frac{dy}{dx}=ay(1-y)$$

より、$y=0, y=1$は明らかに解である。$y\neq 0, y\neq 1$ のとき、

$$\frac{dy}{(1-y)y}=adx$$

$$\int\frac{1}{(1-y)y}dy=a\int dx$$

$$\int\left\{\frac{1}{y}-\frac{1}{y-1}\right\}dy=a\int dx$$

$$\log|y|-\log|y-1|=ax+C'$$

$$\log\left|\frac{y}{y-1}\right|=ax+C'$$

$$\frac{y}{y-1}=\pm e^{ax+C'}$$

$$\therefore \underline{y=\frac{Ce^{ax}}{1-Ce^{ax}},\quad y=1,\left(C=0\text{とすれば } y=0\text{ は含まれる}\right)}$$

(10) $y'=1+y^2$

$$\frac{dy}{dx}=1+y^2$$

より、

$$\frac{dy}{1+y^2}=dx$$

$$\int\frac{1}{1+y^2}dy=\int dx$$

$$\tan^{-1}y=x+C$$

$$\therefore\ \underline{y=\tan(x+C)}$$

チャート微分積分 P.352 基本例題 164（2）

(11) $\boldsymbol{y'\tan x=\frac{1}{\tan y}}$

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos y}{\sin y}$$

$$\frac{\sin y}{\cos y}dy=\frac{\cos x}{\sin x}dx$$

$$\int\frac{\sin y}{\cos y}dy=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx$$

$$-\log|\cos y|=\log|\sin x|+C'$$

$$\therefore\ \underline{y=\cos^{-1}\left(\frac{C}{\sin x}\right)}$$

キャンパス・ゼミ 常微分方程式 P.18 例題 3、4

(12) $\boldsymbol{\sqrt{1-x^2}y'+\sqrt{1-y^2}=0}$ $\boldsymbol{\left(\text{ただし、}-1<x<1,-1<y<1\right)}$ **初期条件：**$\boldsymbol{y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$-1<x<1,-1<y<1$より、$\sqrt{1-x^2}\neq 0,\sqrt{1-y^2}\neq 0$であるから

$$\sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dx}+\sqrt{1-y^2}=0$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy=-\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$\sin^{-1}y=-\sin^{-1}x+C$$

$$\therefore\ \text{一般解は}\ \underline{\sin^{-1}y+\sin^{-1}x=C}$$

$y\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき、$C=\dfrac{\pi}{2}$ であるから、

特殊解は $\underline{\sin^{-1}y+\sin^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}}$　または　$\underline{y=\cos(\sin x)}$

(13) $\boldsymbol{(1-x)y'=y-1}$ $\boldsymbol{(x\neq 1, y\neq 1)}$　**初期条件：**$\boldsymbol{y(2)=2}$

$x\neq 1, y\neq 1$より、

$$(1-x)\frac{dy}{dx}=y-1$$

$$\frac{dy}{y-1}=-\frac{1}{x-1}dx$$

$$\int\frac{1}{y-1}dy=-\int\frac{1}{x-1}dx$$

$$\log|y-1|=-\log|x-1|+C'$$

$$\log|(y-1)(x-1)|=C'$$

$$(y-1)(x-1)=C$$

∴ 一般解は $\underline{y=\dfrac{C}{x-1}+1}$

$y(2)=2$ のとき、$C=1$ であるから、

特殊解は $\underline{y=\dfrac{1}{x-1}+1}$

キャンパス・ゼミ 演習 常微分方程式 P.10 演習問題 1

(14) $\boldsymbol{x\sqrt{x-1}\cdot y'=1+y^2}$ $\boldsymbol{(x\neq 0, x\neq 1)}$　**初期条件：**$\boldsymbol{y(2)=\sqrt{3}}$

$x\neq 0, x\neq 1$より、

$$x\sqrt{x-1}\frac{dy}{dx}=1+y^2$$

$$\frac{dy}{1+y^2}=\frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$$

$$\int\frac{1}{1+y^2}dy=\int\frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$$

$(左辺)=\tan^{-1}y+C_1,$

右辺については $\sqrt{x-1}=t$ とおくと、$x=t^2+1,$　$dx=2tdt$ であるから、

$(右辺)=\displaystyle\int\frac{2}{t^2+1}dt=2\tan^{-1}t+C_2=2\tan^{-1}\sqrt{x-1}+C_2$

$$\therefore \text{一般解は}\ \underline{\tan^{-1} y = 2\tan^{-1}\sqrt{x-1} + C}$$

$$y(2) = \sqrt{3}\ \text{のとき、}C = -\frac{\pi}{6}\ \text{であるから、}$$

$$\text{特殊解は}\ \underline{\tan^{-1} y = 2\tan^{-1}\sqrt{x-1} - \frac{\pi}{6}}\quad \text{または}\quad \underline{y = \tan\left(2\tan^{-1}\sqrt{x-1} - \frac{\pi}{6}\right)}$$

- **同次形**

教科書 P.8 問題 3

(1) $xy' = 2x + y$

$$x\frac{dy}{dx} = 2x + y$$

$x = 0$ のとき、$y = 0$ となる。$x \neq 0$ のとき、

$$\frac{dy}{dx} = 2 + \frac{y}{x}$$

と変形できるので、

$$\frac{y}{x} = u\ \text{とおくと、}\ \frac{dy}{dx} = 2 + u$$

よって、

$$u + x\frac{du}{dx} = 2 + u$$

$$du = \frac{2}{x}dx$$

$$\int du = 2\int \frac{1}{x}dx$$

$$u = 2\log|x| + C$$

$$\frac{y}{x} = 2\log|x| + C$$

$$\therefore \underline{y = 2x(\log|x| + C),\ \ y = 0}$$

(2) $x^2y' = y^2 - xy$（演習に出題）

$$x^2\frac{dy}{dx} = y^2 - xy$$

$x = 0$ のとき、$y = 0$ となる。$x \neq 0$ のとき、

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}$$

と変形できるので、

$$\frac{y}{x}=u \text{ とおくと、} \frac{dy}{dx}=u^2-u$$

$$u+x\frac{du}{dx}=u^2-u$$

$$x\frac{du}{dx}=u^2-2u$$

ここで、$u=0$ のとき、すなわち $y=0$ のとき、明らかに解であり、

$u=2$ のとき、すなわち$y=2x$ のときも、明らかに解である。

よって、$u\neq 0,\ u\neq 1$ のとき、

$$\frac{1}{u^2-2u}du=\frac{1}{x}dx$$

$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u-2}-\frac{1}{u}\right)du=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{u-2}{u}\right|=\log|x|+C'$$

$$\frac{u-2}{u}=Cx^2$$

$$\frac{y}{x}-2=Cxy$$

$$\therefore\ \underline{y=\frac{2x}{1-Cx^2},\ \ y=0,\ \ \left(C=0 \text{ とすれば } y=2x \text{ は含まれる}\right)}$$

教科書 P.12 演習問題［3］

(3) $xy'=x+y$ (レポートに出題)

$$x\frac{dy}{dx}=x+y$$

$x=0$ のとき、$y=0$ となる。$x\neq 0$ のとき、

$$\frac{dy}{dx}=1+\frac{y}{x}$$

と変形できるので、

$$\frac{y}{x}=u \text{ とおくと、} \frac{dy}{dx}=1+u$$

よって、

$$u+x\frac{du}{dx}=1+u$$

$$du=\frac{1}{x}dx$$

$$\int du = \int \frac{1}{x} dx$$

$$u = \log|x| + C$$

$$\frac{y}{x} = \log|x| + C \qquad \therefore \underline{y = x(\log|x| + C),\ \ y = 0}$$

(4) $x^2y' + y^2 = 0$ （レポートに出題）

$$x^2\frac{dy}{dx} + y^2 = 0$$

$x = 0$ のとき、$y = 0$ となる。$x \neq 0$ のとき、

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0$$

と変形できるので、

$$\frac{y}{x} = u \text{ とおくと、} \frac{dy}{dx} + u^2 = 0$$

$$u + x\frac{du}{dx} + u^2 = 0$$

ここで、$u = 0$ のとき、すなわち $y = 0$ のとき、明らかに解であり、

$u = -1$ のとき、すなわち $y = -x$ のとき、明らかに解である。

よって、$u \neq 0,\ u \neq 1$ のとき、

$$\frac{1}{u^2 + u}du = -\frac{1}{x}dx$$

$$\int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)du = -\int \frac{1}{x}dx$$

$$\log\left|\frac{u}{u+1}\right| = -\log|x| + C'$$

$$\frac{u}{u+1} = \frac{C}{x}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{C}{x}\left(\frac{y}{x} + 1\right)$$

$$\therefore \underline{y = \frac{Cx}{x - C},\qquad y = -x}$$

$\boxed{\text{チャート微分積分 P.350 基本例題 163}}$

(5) $y' = \dfrac{y}{x+y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)}$$

と変形できるので、

$$\frac{y}{x}=u \text{ とおくと、} \frac{dy}{dx}=\frac{u}{1+u}$$

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{u}{1+u}$$

ここで、$u=0$ のとき、すなわち$y=0$ のとき、明らかに解である。

よって、$u\neq 0$ のとき、

$$\frac{1+u}{u^2}du=-\frac{1}{x}dx$$

$$\int\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}\right)du=-\int\frac{1}{x}dx$$

$$-\frac{1}{u}+\log\left|\frac{y}{x}\right|=-\log|x|+C$$

$$-\frac{x}{y}+\log|u|=-\log|x|+C$$

$$-\frac{x}{y}+\log|y|=C$$

$$\underline{\log|y|-\frac{x}{y}=C,\quad y=0}$$

(6) $\boldsymbol{y'=\dfrac{x+y}{x-y}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)}{1-\left(\frac{y}{x}\right)}$$

と変形できるので、

$$\frac{y}{x}=u \text{ とおくと、} \frac{dy}{dx}=\frac{1+u}{1-u}$$

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+u}{1-u}$$

$$\frac{1-u}{u^2+1}du=\frac{1}{x}dx$$

$$\left(\frac{1}{u^2+1}-\frac{u}{u^2+1}\right)du=\frac{1}{x}dx$$

$$\int\left(\frac{1}{u^2+1}-\frac{u}{u^2+1}\right)du=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{2}\log\left\{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1\right\}=\log|x|+C$$

$$\therefore\ \underline{\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)=C}$$

(7) $\boldsymbol{y'=\dfrac{(x+y)^2}{xy}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x+y)^2}{xy}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(1+\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}}$$

と変形できるので、

$$\frac{y}{x}=u\ \text{とおくと、}\ \frac{dy}{dx}=\frac{(1+u)^2}{u}$$

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{(1+u)^2}{u}$$

$$x\frac{du}{dx}=\frac{2u+1}{u}$$

ここで、$u=-\frac{1}{2}$ のとき、すなわち $y=-\frac{1}{2}x$ のとき、明らかに解である。

よって、$u\neq-\frac{1}{2}$ のとき、

$$\frac{u}{1+2u}du=\frac{1}{x}dx$$

$$\int\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{1+2u}\right)du=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}\log|1+2u|=\log|x|+C$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{2}\log\left|1+2\left(\frac{y}{x}\right)\right|=\log|x|+C$$

$$\therefore\ \underline{\frac{2y}{x}-\frac{1}{2}\log|x^3(x+2y)|=C,\ \ y=-\frac{1}{2}x}$$

チャート微分積分 P.373 重要例題 098 (5)

(8) $\boldsymbol{(2xy-x^2)y'+y^2-2xy=0}$

$$(2xy-x^2)\frac{dy}{dx}+y^2-2xy=0$$

$$x(2y-x)\frac{dy}{dx}+y(y-2x)=0$$

$x=0$ のとき、$y=0$ となり、明らかに解である。$x\neq 0$ のとき、

$$\left\{2\left(\frac{y}{x}\right)-1\right\}\frac{dy}{dx}+\left(\frac{y}{x}\right)^2-2\left(\frac{y}{x}\right)=0$$

と変形できるので、

$$\frac{y}{x}=u \text{ とおくと、} (2u-1)\frac{dy}{dx}+u^2-2u=0$$

$u=\frac{1}{2}$ のとき、$y=\frac{1}{2}x$ となが、これは与式を満たさない。$u\neq\frac{1}{2}$ のとき、

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2u-u^2}{2u-1}$$

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{2u-u^2}{2u-1}$$

$$x\frac{du}{dx}=\frac{3(u-u^2)}{2u-1}$$

ここで、$u=0$ のとき、すなわち $y=0$ のとき、明らかに解であり、
$u=1$ のとき、すなわち $y=x$ のとき、明らかに解である。
よって、$u\neq 0, u\neq 1$ のとき、

$$\frac{2u-1}{3(u-u^2)}du=\frac{1}{x}dx$$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{u-1}+\frac{1}{u}\right)du=\frac{1}{x}dx$$

$$-\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{u-1}+\frac{1}{u}\right)du=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\frac{1}{3}\{\log|u-1|+\log|u|\}=\log|x|+C'$$

$$\therefore\ \underline{xy(y-x)=C\quad \left(C=0 \text{ とすれば } y=0, y=x \text{ は含まれる}\right)}$$

チャート微分積分 P.352 基本例題 164 (4)(5)

(9) $\boldsymbol{x^2+y^2=2xyy'}$

$$x^2+y^2=2xy\frac{dy}{dx}$$

$x=0$ のとき、$y=0$ となり、明らかに解である。$x\neq 0$ のとき、

$$1+\left(\frac{y}{x}\right)^2=2\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx}$$

と変形できるので、

$$\frac{y}{x}=u \text{ とおくと、} 1+u^2=2u\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+u^2}{2u}$$

よって、

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{2u}$$

$$x\frac{du}{dx}=\frac{1-u^2}{2u}$$

ここで、$u=\pm 1$ のとき、すなわち $y=\pm x$ のとき、明らかに解である。

よって、$u\neq\pm 1$ のとき、

$$\frac{2u}{1-u^2}du=\frac{1}{x}dx$$

$$\left(\frac{1}{1-u}-\frac{1}{1+u}\right)du=\frac{1}{x}dx$$

$$\int\left(\frac{1}{1-u}-\frac{1}{1+u}\right)du=\int\frac{1}{x}dx$$

$$-\log|1-u|+\log|1+u|=\log|x|+C'$$

$$\therefore\ \underline{x^2-y^2=Cx,\ \ y=0\left(C=0 \text{ とすれば } y=\pm x \text{ は含まれる}\right)}$$

(10) $\boldsymbol{\left(x\cos\frac{y}{x}+y\sin\frac{y}{x}\right)y+\left(x\cos\frac{y}{x}-y\sin\frac{y}{x}\right)xy'=0}$

$$\left(x\cos\frac{y}{x}+y\sin\frac{y}{x}\right)y+\left(x\cos\frac{y}{x}-y\sin\frac{y}{x}\right)xy'=0$$

$$\left(\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\sin\frac{y}{x}\right)\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\cos\frac{y}{x}-\frac{y}{x}\sin\frac{y}{x}\right)y'=0$$

と変形できるので、

$$\frac{y}{x}=u \text{ とおくと、} (\cos u+u\sin u)u+(\cos u-u\sin u)uy'=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{(\cos u+u\sin u)u}{\cos u-u\sin u}$$

よって、

$$u+x\frac{du}{dx}=-\frac{(\cos u+u\sin u)u}{\cos u-u\sin u}$$

$$x\frac{du}{dx}=-\frac{2u\cos u}{\cos u-u\sin u}$$

ここで、$u=0$ のとき、すなわち$y=0$ のとき、明らかに解であり、

$\cos u=0,\ u=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ （nは整数)のとき、すなわち$y=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x$ （nは整数)

のとき、明らかに解である。

よって、$u\neq 0$ かつ$u\neq\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ $\left(n\text{は整数}\right)$のとき、

$$-\frac{1}{2}\frac{\cos u-u\sin u}{u\cos u}du=\frac{1}{x}dx$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{\cos u-u\sin u}{u\cos u}du=\int\frac{1}{x}dx$$

$$-\frac{1}{2}\log|u\cos u|=\log|x|+C'$$

$$-\frac{1}{2}\log|u\cos u|=\log|x|+C'$$

$$\log\left|\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right|=\log x^2+C'$$

$$\therefore\ \underline{\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}-Cx^2=0}$$

キャンパス・ゼミ 常微分方程式 P.22 例題 6

(11) $\boldsymbol{xy'=y+\sqrt{x^2+y^2}\ (x\neq 0)}$

$$xy'=y+\sqrt{x^2+y^2}$$

$$y'=\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

と変形できるので、

$$\frac{y}{x}=u\ \text{とおくと、}\ y'=u+\sqrt{1+u^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=u+\sqrt{1+u^2}$$

よって、

$$u+x\frac{du}{dx}=u+\sqrt{1+u^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du=\frac{1}{x}dx$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\log\left|u+\sqrt{1+u^2}\right|=\log|x|+C''$$

$$u+\sqrt{1+u^2}=\pm C'x$$

$$\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=Cx$$

$$\therefore\ \underline{C^2x^2-2Cy=1}$$

キャンパス・ゼミ 演習 常微分方程式 P.11 演習問題 2

（12）$xyy'+y^2+x^2=0$（$x\neq 0$）　初期条件：$y(1)=1$

$$xyy'+y^2+x^2=0$$

$$\frac{y}{x}y'+\left(\frac{y}{x}\right)^2+1=0$$

と変形できるので、

$$\frac{y}{x}=u \text{ とおくと、} uy'=-u^2-1$$

$u=0$ のとき、すなわち $y=0$ のとき、明らかに解であり、$u\neq 0$のとき、

$$\frac{dy}{dx}=-u-\frac{1}{u}$$

よって、

$$u+x\frac{du}{dx}=-u-\frac{1}{u}$$

$$x\frac{du}{dx}=-2u-\frac{1}{u}$$

$$\frac{u}{2u^2+1}du=-\frac{1}{x}dx$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{4u}{2u^2+1}du = -\int \frac{1}{x}dx$$

$$\frac{1}{4}\log(2u^2+1) = -\log|x| + C'$$

$$\therefore \underline{\text{一般解は } x^2(2y^2+x^2) = C,\ \ y=0}$$

$y(1)=1$のとき、$C=3$ であるから

$$\therefore \underline{\text{特殊解は } x^2(2y^2+x^2) = 3}$$

- ***$X = h(x), Y = k(y)$ パターン***

教科書 P.8 問題 3 (3)

(1) $\boldsymbol{y' = \dfrac{2x+y+2}{x+1}}$

$$y' = \frac{2x+y+2}{x+1} = 2 + \frac{y}{x+1}$$

より、$X = x+1, Y = y$ とおくと、

$$\frac{dY}{dX} = 2 + \frac{Y}{X}$$

となるので、$\frac{Y}{X} = Z$ とおくと、$\frac{dY}{dX} = Z + X\frac{dZ}{dX}$ であるから、

$$Z + X\frac{dZ}{dX} = 2 + Z$$

$$dZ = \frac{2}{X}dX$$

$$\int dZ = 2\int \frac{1}{X}dX$$

$$Z = 2\log|X| + C \quad (C:\text{任意定数})$$

$$\frac{Y}{X} = 2\log|X| + C$$

$$\frac{y}{x+1} = 2\log|x+1| + C \qquad \therefore \underline{y = (x+1)\{2\log|x+1| + C\}}$$

教科書 P.12 演習問題［3］(3)

(2) $(x+1)y' = x+2y+3$ (レポートに出題)

$X = x+1, Y = y+1$ とおくと、

$$X\frac{dY}{dX} = X + 2Y$$

ここで、$X = 0$ のとき、すなわち $x = -1$ のとき、$y = -1$ のとき、明らかに解であり、

$X \neq 0$ のとき、

$$\frac{dY}{dX} = 1 + 2\frac{Y}{X}$$

となるので、$\frac{Y}{X} = Z$ とおくと、 $\frac{dY}{dX} = Z + X\frac{dZ}{dX}$ であるから、

$$Z + X\frac{dZ}{dX} = 1 + 2Z$$

$$X\frac{dZ}{dX} = 1 + Z$$

ここで、$1 + Z = 0$ のとき、すなわち $y = -x - 2$ のとき、明らかに解であり、

$X \neq 0$ のとき、

$$\frac{1}{1+Z}dZ = \frac{1}{X}dX$$

$$\int \frac{1}{1+Z}dZ = \int \frac{1}{X}dX$$

$$\log|1+Z| = \log|X| + C'$$

$$1 + \frac{Y}{X} = CX$$

$$1 + \frac{y+1}{x+1} = C(x+1)$$

$$y + 1 = (x+1)\{C(x+1) - 1\}$$

$$\therefore \underline{y = C(x+1)^2 - x - 2, \left(C = 0 \text{ とすれば } y = -x-2 \text{ は含まれる}\right)}$$

➢ ***$y' = f(ax+by+c)$ パターン***

キャンパス・ゼミ 演習 常微分方程式 P.12, 13 演習問題 3, 4

(1) $y' = \sqrt{2x+y-1}$ 　初期条件：$y(2) = 1$ (レポートに出題)

$2x + y - 1 = u$ とおく。両辺をx で微分すると、

$$2+\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-2$$

一方、与式は

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{u}$$

よって、

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-2=\sqrt{u}$$

$$\frac{1}{\sqrt{u}+2}du=dx$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{u}+2}du=\int dx$$

$\sqrt{u}+2=t$ とおくと、$u=(t-2)^2$, $du=2(t-2)dt$ であるから

$$(\text{左辺})=2\int\frac{t-2}{t}dt=2\{t-2\log t\}=2t-4\log t$$
$$=2\left(\sqrt{u}+2\right)-4\log\left(\sqrt{u}+2\right)$$

であるから

$$2\left(\sqrt{u}+2\right)-4\log\left(\sqrt{u}+2\right)=x+C$$

$\therefore$ 一般解は $\underline{2\left(\sqrt{2x+y-1}+2\right)-4\log\left(\sqrt{2x+y-1}+2\right)=x+C}$

$y(2)=1$ のとき、

$2\left(\sqrt{4+1-1}+2\right)-4\log\left(\sqrt{4+1-1}+2\right)=2+C$ であるから $C=6-8\log 2$

$\therefore$ 特殊解は $\underline{2\left(\sqrt{2x+y-1}+2\right)-4\log\left(\sqrt{2x+y-1}+2\right)=x+6-8\log 2}$

(2) $\boldsymbol{y'=-\frac{x+y+2}{2x+2y+5}}$

$x+y=u$ とおく。両辺をx で微分すると、

$$1+\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-1$$

一方、与式は

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{u+2}{2u+5}$$

よって、

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-1=-\frac{u+2}{2u+5}$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{u+3}{2u+5}$$

ここで、$u=-3$ のとき、すなわち$y=-x-3$ のとき、明らかに解である。

よって、$u\neq -3$ のとき、

$$\frac{2u+5}{u+3}du=dx$$

$$\left(2-\frac{1}{u+3}\right)du=dx$$

$$\int\left(2-\frac{1}{u+3}\right)du=\int dx$$

$$2u-\log|u+3|=x+C'$$

$$2(x+y)-\log|x+y+3|=x+C'$$

$$\log|x+y+3|=x+2y-C'$$

$$x+y+3=Ce^{x+2y}$$

∴ 一般解は $\underline{y=Ce^{x+2y}-x-3,\left(C=0 \text{とすれば } y=-x-3 \text{ は含まれる}\right)}$

チャート微分積分 P.378 重要例題 101

(3) $\boldsymbol{y'=\dfrac{1}{x+y+1}}$

$x+y=u$ とおく。両辺をx で微分すると、

$$1+\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-1$$

一方、与式は

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{u+1}$$

よって、

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-1=\frac{1}{u+1}$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{u+2}{u+1}$$

ここで、$u=-2$ のとき、すなわち$y=-x-2$ のとき、明らかに解である。

よって、$u \neq -2$ のとき、

$$\frac{u+1}{u+2}du = dx$$

$$\left(1 - \frac{1}{u+2}\right)du = dx$$

$$\int \left(1 - \frac{1}{u+2}\right)du = \int dx$$

$$u - \log|u+2| = x + C'$$

$$(x+y) - \log|x+y+2| = x + C'$$

$$\log|x+y+2| = y - C'$$

$$x + y + 2 = Ce^{y}$$

$\therefore$ 一般解は $\underline{y = Ce^{y} - x - 2, \left(C = 0 \text{ とすれば } y = -x-2 \text{ は含まれる}\right)}$

➢ 変数分離形の応用

キャンパス・ゼミ 常微分方程式 P.26 演習問題 2

(1) $\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x - y + 1}{x - 2y + 1} \left(x \neq -\dfrac{1}{3}\right) \cdots ①}$　**について**

$\boldsymbol{2x - y + 1 = 0,\quad x - 2y + 1 = 0}$ **の解を、**$\boldsymbol{x = \alpha,\ y = \beta}$ **とおくとき、**

$\boldsymbol{u = x - \alpha,\ v = y - \beta}$ **とおいて①の一般解を求めよ。**

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

を解くと、$x = -\frac{1}{3},\ y = \frac{1}{3}$ であるから、題意より、$u = x + \frac{1}{3}, v = y - \frac{1}{3}$ とおく。

それぞれをxで微分すると、

$$\frac{du}{dx} = 1,\quad \frac{dv}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

であるから、

$$\frac{dv}{du} = \frac{\frac{dv}{dx}}{\frac{du}{dx}} = \frac{dy}{dx}$$

一方、与式は、

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\left(u-\frac{1}{3}\right)-\left(v+\frac{1}{3}\right)+1}{\left(u-\frac{1}{3}\right)-2\left(v+\frac{1}{3}\right)+1}=\frac{2u-v}{u-2v}$$

よって、

$$\frac{dv}{du}=\frac{2u-v}{u-2v}$$

ここで$x\neq-\frac{1}{3}$であるから、$u=x+\frac{1}{3}\neq0$なので、

$$\frac{dv}{du}=\frac{2-\frac{v}{u}}{1-2\frac{v}{u}}$$

ここで、$\frac{v}{u}=w$とおくと、$\frac{dv}{du}=w+u\frac{dw}{du}$であるから、

$$w+u\frac{dw}{du}=\frac{2-w}{1-2w}$$

$$u\frac{dw}{du}=\frac{2(w^2-w+1)}{1-2w}$$

$$\frac{2w-1}{w^2-w+1}dw=-2\frac{1}{u}du$$

$$\int\left(\frac{2w-1}{w^2-w+1}\right)du=-2\int\frac{1}{u}du$$

$$\log|w^2-w+1|=-2\log|u|+C'$$

$$w^2-w+1=\frac{C''}{u^2}$$

$$u^2(w^2-w+1)=C''$$

$$v^2-uv+u^2=C''$$

$$\left(y-\frac{1}{3}\right)^2-\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(y-\frac{1}{3}\right)+\left(x+\frac{1}{3}\right)^2=C''$$

∴ 一般解は $\underline{x^2+y^2-xy+x-y=C}$

キャンパス・ゼミ 演習 常微分方程式 P.14 演習問題 5

(2) $\boldsymbol{y'=\frac{2x-y+3}{x-2y+3}}$ **(前問と同様の手法を用いてよい)**

$$\begin{cases}2x-y+3=0\\x-2y+3=0\end{cases}$$

を解くと、$x=-1,\ y=1$であるから、題意より、$u=x+1, v=y-1$ とおく。

それぞれをxで微分すると、

$$\frac{du}{dx}=1,\quad \frac{dv}{dx}=\frac{dy}{dx}$$

であるから、

$$\frac{dv}{du}=\frac{\frac{dv}{dx}}{\frac{du}{dx}}=\frac{dy}{dx}$$

一方、与式は、

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2(u-1)-(v+1)+3}{(u-1)-2(v+1)+3}=\frac{2u-v}{u-2v}$$

よって、

$$\frac{dv}{du}=\frac{2u-v}{u-2v}$$

$x\neq -1$のとき、

$$\frac{dv}{du}=\frac{2-\frac{v}{u}}{1-2\frac{v}{u}}$$

ここで、$\frac{v}{u}=w$ とおくと、$\frac{dv}{du}=w+u\frac{dw}{du}$ であるから、

$$\begin{aligned}
w+u\frac{dw}{du}&=\frac{2-w}{1-2w}\\
u\frac{dw}{du}&=\frac{2(w^2-w+1)}{1-2w}\\
\frac{2w-1}{w^2-w+1}dw&=-2\frac{1}{u}du\\
\int\left(\frac{2w-1}{w^2-w+1}\right)du&=-2\int\frac{1}{u}du\\
\log|w^2-w+1|&=-2\log|u|+C'\\
w^2-w+1&=\frac{C''}{u^2}\\
u^2(w^2-w+1)&=C''\\
v^2-uv+u^2&=C''\\
(y-1)^2-(x+1)(y-1)+(x+1)^2&=C''
\end{aligned}$$

$\therefore$ 一般解は $\underline{x^2+y^2-xy+3x-3y=C}$

$x=-1$のとき、$y=2$ となって、これは題意を満たす。

チャート微分積分 P.376 重要例題 100

(3)　$y' = \dfrac{x-2y+3}{2x+y-1}$　**（前問と同様の手法を用いてよい）**

$$\begin{cases} x-2y+3=0 \\ 2x+y-1=0 \end{cases}$$

を解くと、$x=-\frac{1}{5},\ y=\frac{7}{5}$ であるから、題意より、$u=x+\frac{1}{5}, v=y-\frac{7}{5}$ とおく。

それぞれをxで微分すると、

$$\frac{du}{dx}=1,\quad \frac{dv}{dx}=\frac{dy}{dx}$$

であるから、

$$\frac{dv}{du}=\frac{\frac{dv}{dx}}{\frac{du}{dx}}=\frac{dy}{dx}$$

一方、与式は、

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(u-\frac{1}{5}\right)-2\left(v+\frac{7}{5}\right)+3}{2\left(u-\frac{1}{5}\right)+\left(v+\frac{7}{5}\right)-1}=\frac{u-2v}{2u+v}$$

よって、

$$\frac{dv}{du}=\frac{u-2v}{2u+v}$$

$x\neq -\frac{1}{5}$ のとき、

$$\frac{dv}{du}=\frac{1-2\frac{v}{u}}{2+\frac{v}{u}}$$

ここで、$\frac{v}{u}=w$ とおくと、$\frac{dv}{du}=w+u\frac{dw}{du}$ であるから、

$$w+u\frac{dw}{du}=\frac{1-2w}{2+w}$$

$$u\frac{dw}{du}=\frac{-(w^2+4w-1)}{2+w}$$

$$\frac{2+w}{w^2+4w-1}dw=-\frac{1}{u}du$$

$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{2w+4}{w^2+4w-1}\right)du=-\int\frac{1}{u}du$$

$$\log|w^2 + 4w - 1| = -2\log|u| + C'$$

$$w^2 + 4w - 1 = \frac{C''}{u^2}$$

$$u^2(w^2 + 4w - 1) = C''$$

$$v^2 + 4uv - u^2 = C''$$

$$\left(y - \frac{7}{5}\right)^2 + 4\left(x + \frac{1}{5}\right)\left(y - \frac{7}{5}\right) - \left(x + \frac{1}{5}\right)^2 = C''$$

$$\therefore \text{一般解は}\ \underline{x^2 - y^2 - 4xy + 6x + 2y = C}$$

$x = -\frac{1}{5}$のとき、$y = -\frac{7}{10}$となって、これは題意を満たす。