第 11 回 1 階常微分方程式（2）

今回のポイント

1. 微分方程式 $y' = \lambda y$ の物理的な意味
2. 完全微分方程式
3. 積分因子と完全微分方程式

➢ 微分方程式 $y' = \lambda y$ の物理的な意味

微分方程式 $y' = \lambda y$ の物理的な意味を考えてみる。この微分方程式は変数分離形なので、

$$y' = \lambda y \quad \to \quad \frac{dy}{dx} = \lambda y, \quad \to \quad \frac{1}{y}dy = \lambda dx,$$

$$\to \quad \int \frac{1}{y}dy = \lambda \int dx, \qquad \to \quad \log|y| = \lambda x + C', \qquad \to \quad |y| = e^{\lambda x + C'},$$

$$\therefore \quad \underline{y = Ce^{\lambda x}}$$

この形の微分方程式は正負いずれの λ に対しても、様々な物理現象に現れる。

例 I　増加率

ある領域内での生物種の個体数 $N(t)$（人口変化、固定種の増加、バクテリアの増殖など）とする。環境が安定している状況においては、その増加率 $\frac{dN(t)}{dt}$ は、個体数 N と正の定数 k に比例すると考えられる。よって、

$$\frac{dN(t)}{dt} = kN(t)$$

この微分方程式を解くと、

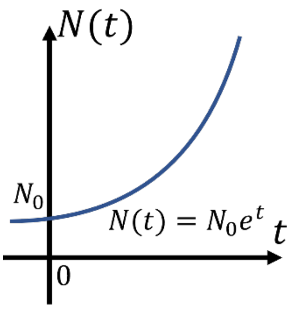
$$y = Ce^{kx}$$

となる。いま初期条件として、

$$N(t = 0) = N_0$$

とすると、

$$N(t) = N_0 e^{kx}$$



となり、そのグラフは右図のようになる。すなわち、初期条件 N_0 と増加係数 k に応じて指数関数的に個体数が爆発的に増加する様子が得られる。

例えばマウスであるならば、初期値を 1 対の番 ($N_0 = 2$)として計算できる。また増加定数kは出生率 a と死亡率 b の差、すなわち $k = a - b$ と書くこともできる。このような成長を妨げる要因がない個体数の増加をマルサス的成長といいます。

例 2　減少率

放射性物質の質量を m とすると、時間に対する質量の変化率は、その質量に比例する。
すなわち、

$$\frac{dm}{dt} = -\lambda m \qquad (\lambda > 0)$$

となる。この微分方程式を解くと、

$$m = Ce^{-\lambda t}$$

となる。いま初期条件として、現在($t = 0$)での質量を

$$m(t = 0) = m_0$$

とすると、

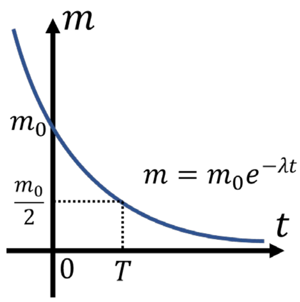
$$m = m_0 e^{-\lambda t}$$

となる。放射性物質の質量が半分になる半減期 T は

$$\frac{m}{2} = m_0 e^{-\lambda T}$$

$$T = \frac{\lambda}{2}\log 2$$

となる。



例 3　増加率 その2

例 1 の例のけるマルサス的成長

$$N(t) = N_0 e^{kx}$$

では環境が安定している状況としたが、実際には生物種を養える環境には限界があるものであり、その個体数の最大許容数を M とする。N が M に近づくにつれて増加率は減少し、$N = M$ で増加はとまる。すなわち比例定数は

$$k \to k_0 \left(1 - \frac{N}{M}\right)$$

となる。よって、微分方程式は

$$\frac{dN(t)}{dt} = k_0 \left(1 - \frac{N}{M}\right) N(t)$$

となる（ロジスティック方程式と呼ばれる）。これを解く。

$n = \frac{N}{M}$ $(0 < n < 1)$ とすると、両辺をM で割ることで、

$$\frac{1}{M}\frac{dN(t)}{dt} = k_0\left(1 - \frac{N}{M}\right)\frac{N(t)}{M}$$

$$\frac{dn}{dt} = k_0(1-n)n$$

となる。これを解くと、

$$\frac{dn}{(n-1)n} = -k_0 dt$$

$$\int \frac{1}{(n-1)n}dn = -k_0 \int dt$$

$$\int \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)dn = -k_0 \int dt$$

$$\log|n-1| - \log n = -k_0 t + C_1$$

$$\log\frac{1-n}{n} = -k_0 t + C_1 \quad (\because 0 < n < 1)$$

$$\frac{1-n}{n} = e^{-k_0 t + C_1}$$

$$= Ce^{-k_0 t}$$

$$\therefore n = \frac{1}{1 + Ce^{-k_0 t}}$$

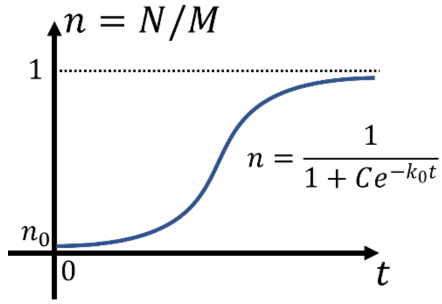
となる。この曲線をロジスティック曲線（Logistic curve）またはロジスティック成長曲線とよぶ。
初期状態（$t = 0$）として

$$n = n_0 = \frac{N_0}{M}$$

とすると、

$$n_0 = \frac{1}{1+C} \text{より} \quad C = \frac{1-n_0}{n_0}$$

となるので、



$$n = \frac{1}{1 + \frac{1-n_0}{n_0}e^{-k_0 t}} = \frac{n_0}{n_0 + (1-n_0)e^{-k_0 t}}$$

$$N = \frac{M}{1 + \left(\frac{M}{N_0} - 1\right)e^{-k_0 t}}$$

となる。このグラフは右上のようになる。M は環境収容力、k_0 は内的自然増加率と呼ばれる。

担当教員：西沢 望 （S-305）：nishizawa.nozomi@kitasato-u.ac.jp

このような曲線は実際の人口増加モデルや病気の罹患者数の推移などを表す数理モデルの基本となり、より現実に近いもでるとなっている。

完全微分方程式

微分方程式のうち、全微分$dz = 0$ の形になるもの

$$\boldsymbol{dz = f_x(x_1, y_1)dx + f_y(x_1, y_1)dy = 0}$$

を"**完全微分形**"または"**完全微分方程式**"という。

1 階微分方程式：

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \qquad \cdots (*)$$

を変形すると

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

となる。ここでもし、$f_x = P(x,y), f_y = Q(x,y)$ がなりたてば、

$$\begin{aligned} &P(x,y)dx + Q(x,y)dy \\ &= f_x(x_1,y_1)dx + f_y(x_1,y_1)dy \\ &= df(x,y) = 0 \end{aligned}$$

となるので、$(*)$の微分方程式の解は

$$f(x,y) = C \qquad (C\text{は任意定数})$$

となる。

完全微分方程式として微分方程式を解くには、上の赤線部分を確認して完全微分形であることを示す必要がある。赤線部分を確認するのに、シュワルツの定理を用いる。

完全微分方程式の判定条件とその一般解

微分方程式 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \cdots (1)$

（ただし、$P(x,y)$および $Q(x,y)$ は連続な偏導関数をもつ）について

(i) 判定条件$P_y = Q_x$を満たすならば、これは"完全微分方程式"であり、

(ii) その一般解は

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C$$

である。

（ただし、x_0, yはx, y のそれぞれの定義域の中の定数を表す）

 担当教員：西沢 望（S-305）：nishizawa.nozomi@kitasato-u.ac.jp

【証明】

(i) $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ が完全微分方程式であるならば、
その定義より2変数関数$f(x,y)$ があって、$df=f_x dx+f_y dy=0$ を満たすので、

$$P(x,y)=f_x,\qquad Q(x,y)=f_y$$

となる。全微分可能であるならば、$P(x,y)$および $Q(x,y)$ は連続な偏導関数を持つので、
fは2階の偏導関数をもつ。シュワルツの定理より

$$P_y=(f_x)_y=f_{xy}=f_{yx}=\left(f_y\right)_x=Q_x$$

$$\underline{\therefore P_y=Q_x}$$

が成り立つ。

(ii) 逆に$P_y=Q_x$が成り立っているものとすると、
ここで、x_0を変数x の定義域の中のある値とし、Pを連続関数として

$$f(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+g(y)\cdots(2)$$

とおく。この式の両辺をy で微分すると、

$$f_y=\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\frac{\partial}{\partial y}g(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial}{\partial y}P(x,y)dx$$

$$=\int_{x_0}^{x}P_y(x,y)dx=\int_{x_0}^{x}Q_x(x,y)dx$$

$$=\int_{x_0}^{x}Q_x(x,y)dx+g'(y)$$

$$=Q(x,y)-Q(x_0,y)+g'(y)\cdots(3)$$

ここで$f_y=\ Q(x,y)$ であるから $g'(y)=Q(x_0,y)$ となる。

$$g(y)=\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy\cdots(4)$$

となる。(4)式を(2)式に代入すると、

$$f(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy\cdots(5)$$

(5)式をxで微分すると$f_x=\ P(x,y)$となるので、

$$df=f_x dx+f_y dy=P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

となり、(1)式は完全微分方程式であり、(1)式の一般解$f(x,y)=C$は、

$$\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy=C$$

である。(証明終わり)

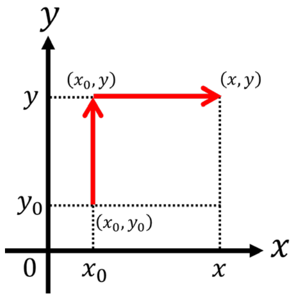
この一般解を求める際の基点 (x_0, y_0)について

右図のように

(i)　基点$(x_0, y_0) \to (x_0, y)$ へ積分 してから

(ii)　$(x_0, y) \to (x, y)$ に積分している

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx}_{\text{(ii)}} + \underbrace{\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy}_{\text{(i)}} = C$$



というように、

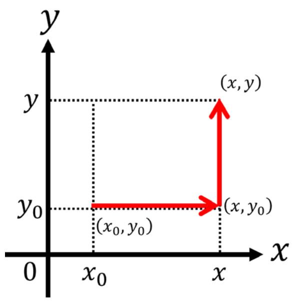
一方、右図のように

(i)　基点$(x_0, y_0) \to (x, y_0)$ へ積分 してから

(ii)　$(x, y_0) \to (x, y)$ に積分している

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx}_{\text{(ii)}} + \underbrace{\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy}_{\text{(i)}} = C$$

としてもよいことは明らか。



基点の選び方

(1)　x, y の変域に特に条件がなければ　$(x_0, y_0) = (0, 0)$ とすることが多い

(2)　$(x, y) \neq (0, 0)$ の場合には$(x_0, y_0) = (0, 1)$ または $(x_0, y_0) = (1, 0)$ などにして $Q(x_0, y)$ もしくは $P(x, y_0)$ が簡素化するように選ぶ。

例題

(1)　$(2x + 5y)dx + (5x + 2y)dy = 0$

$P(x,y) = 2x + 5y,\quad Q(x,y) = 5x + 2y$ とおくと、

$P_y(x,y) = 5,\quad Q_x(x,y) = 5$ なので、　$P_x(x,y) = Q_y(x,y)$ が成り立つ。

よって、与式は完全微分方程式であるから、この一般解は、

$$\int_0^x (2x + 5y)dx + \int_0^y (5 \cdot 0 + 2y)dy = C$$

$$[x^2 + 5xy]_0^x + [y^2]_0^y = C$$

$$\underline{x^2 + 5xy + y^2 = C \quad (C\text{は任意定数})}$$

(2)　$(2xy - \cos x)dx + (x^2 - 1)dy = 0$

$P(x,y) = 2xy - \cos x,\quad Q(x,y) = x^2 - 1$ とおくと、

$P_y(x,y) = 2s,\quad Q_x(x,y) = 2x$ なので、　$P_x(x,y) = Q_y(x,y)$ が成り立つ。

よって、与式は完全微分方程式であるから、この一般解は、

$$\int_0^x (2xy-\cos x)dx + \int_0^y (0^2-1)dy = C$$

$$[x^2y-\sin x]_0^x + [-y]_0^y = C$$

$$\underline{x^2y-\sin x - y = C \quad (C\text{は任意定数})}$$

例題

(1) $(\boldsymbol{x^2+y})\boldsymbol{dx}+(\boldsymbol{x-e^y})\boldsymbol{dy}=\boldsymbol{0}$

$P(x,y)=x^2+y,\quad Q(x,y)=x-e^y$ とおくと、

$P_y(x,y)=1,\quad Q_x(x,y)=1$ なので、 $P_x(x,y)=Q_y(x,y)$ が成り立つ。

よって、与式は完全微分方程式であるから、この一般解は、

$$\int_0^x (x^2+y)dx + \int_0^y (0-e^y)dy = C$$

$$\left[\frac{x^3}{3}+xy\right]_0^x + [-e^y]_0^y = C'$$

$$\frac{x^3}{3}+xy-e^y+1=C'$$

$$\underline{x^3+3xy-3e^y=C \quad (C\text{は任意定数})}$$

(2) $\dfrac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x^2+y^2}}\boldsymbol{dx}-\dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x^2+y^2}}\boldsymbol{dy}=\boldsymbol{0}$ 　(ただし、$(x,y)\neq(0,0)$)

$P(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2},\quad Q(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ とおくと、

$$P_y(x,y)=\frac{1\cdot(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$Q_x(x,y)=-\frac{1\cdot(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

なので、 $P_x(x,y)=Q_y(x,y)$ が成り立つ。

よって、与式は完全微分方程式である。

$(x,y)\neq(0,0)$ であるから、基点を$(x_0,y_0)=(0,1)$ とすれば、一般解は、

$$\int_0^x \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx + \int_1^y \left(\frac{0}{0^2+y^2}\right)dy = C'$$

$$\int_0^x \left(\frac{\frac{1}{y}}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}\right)dx = C'$$

$$\frac{1}{y}\left[y\cdot\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)\right]_0^x = C'$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) = C'$$

$$\frac{x}{y} = \tan C'$$

$$\underline{y = C \quad (C\text{は任意定数})}$$

(3) $\displaystyle \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy = 0}$ $\left(\text{ただし、}(x,y) \neq (0,0), y \neq 0\right)$

$\displaystyle P(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad Q(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$ とおくと、

$$P_y(x,y) = \frac{-y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad Q_x(x,y) = \frac{-y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

なので、 $P_x(x,y) = Q_y(x,y)$ が成り立つ。

よって、与式は完全微分方程式である。

$(x,y) \neq (0,0)$ であるから、基点を$(x_0,y_0) = (0,1)$ とすれば、一般解は、

$$\int_0^x \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dx + \int_1^y \left(\frac{1}{y} - \frac{0}{y\sqrt{0^2+y^2}}\right)dy = C$$

$$\left[\log\left|x+\sqrt{x^2+y^2}\right|\right]_0^x + [\log|y|]_1^y = C'$$

$$\log\left|x+\sqrt{x^2+y^2}\right| - \log|y| + \log|y| = C'$$

$$\log\left|x+\sqrt{x^2+y^2}\right| = C'$$

$$x+\sqrt{x^2+y^2} = e^{C'}$$

$$\underline{x+\sqrt{x^2+y^2} = C \quad (C\text{は任意定数})}$$

➢ 積分因子と完全微分方程式

微分方程式 $Pdx + Qdy = 0$ がそのまま完全微分方程式でない場合に、
適当な関数 $\lambda(x,y)$ を両辺にかけると、$\lambda Pdx + \lambda Qdy = 0$ が完全微分方程式になることがある。このとき$\lambda(x,y)$、をこの微分方程式の積分因子とよぶ。

- どんな 1 階微分方程式も積分因子を持つ
- 積分因子は無限に存在する

ことが知られているが、積分因子を求めるには、場合に応じた工夫が必要となる。
しかし、以下のように λ が x もしくは y だけの関数になる特殊な場合には求めることができる。

微分方程式

$$Pdx + Qdy = 0 \cdots (1)$$

の両辺にλをかけて

$$\lambda Pdx + \lambda Qdy = 0 \cdots (2)$$

としたとき、

$$(\lambda P)_y = (\lambda Q)_x$$

$$\lambda_y P + \lambda P_y = \lambda_x Q + \lambda Q_x \cdots (3)$$

が成り立てば、完全微分方程式として解くことができる。

(i)　$\lambda = \lambda(x)$ の場合、(3) において$\lambda_y = 0$ であるから、

$$\lambda P_y = \lambda_x Q + \lambda Q_x$$

$$\lambda_x Q = \lambda\left(P_y - Q_x\right)$$

$$Q\frac{d\lambda}{dx} = \lambda\left(P_y - Q_x\right)$$

$$\frac{d\lambda}{dx} = \lambda\left(\frac{P_y - Q_x}{Q}\right)$$

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{P_y - Q_x}{Q}dx$$

ここで $\dfrac{P_y - Q_x}{Q}$ が x のみの関数であるならば、変数分離形として解くことができる。

$$\int\frac{d\lambda}{\lambda} = \int\frac{P_y - Q_x}{Q}dx$$

$$\log|\lambda| = \int\frac{P_y - Q_x}{Q}dx$$

$$\underline{\lambda = e^{\int\frac{P_y - Q_x}{Q}dx}}$$

となる。（積分定数は不要）

(ii)　$\lambda = \lambda(y)$ の場合も同様に

$\dfrac{P_y - Q_x}{P}$ が y のみの関数であるならば、

$$\underline{\lambda = e^{-\int\frac{P_y - Q_x}{P}dy}}$$

となる。（積分定数は不要）

積分因子の求め方

完全微分方程式でない微分方程式　$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ について

(iii) $\frac{P_y-Q_x}{Q}$ が x のみの関数であるならば、積分因子は $\lambda=e^{\int\frac{P_y-Q_x}{Q}dx}$

(iv) $\frac{P_y-Q_x}{P}$ が y のみの関数であるならば、積分因子は $\lambda=e^{-\int\frac{P_y-Q_x}{P}dy}$

例

(1)　$\boldsymbol{(x^2+y)dx-xdy=0}$

$P=x^2+y,\ Q=-x$ とおくと、$P_y=1,\ Q_x=-1$ となるので、与式は完全微分方程式ではない。しかし、

$$\frac{P_y-Q_x}{Q}=\frac{1-(-1)}{-x}=-\frac{2}{x}$$

となり、x のみの関数となるので、積分因子 λ は、

$$\lambda=e^{\int\frac{P_y-Q_x}{Q}dx}=e^{\int\left(-\frac{2}{x}\right)dx}=e^{-2\log|x|}=e^{\log\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{x^2}$$

となる。この積分定数を与式にかけると

$$\frac{(x^2+y)}{x^2}dx-\frac{x}{x^2}dy=0$$

$$\left(1+\frac{y}{x^2}\right)dx-\frac{1}{x}dy=0$$

となる。改めて $P=1+\frac{y}{x^2},\ Q=-\frac{1}{x}$ とおくと、$P_y=\frac{1}{x^2},\ Q_x=\frac{1}{x^2}$ となるので完全微分方程式となる。$x\neq 0$ であるから、基点を $(x_0,y_0)=(1,0)$ とすれば、一般解は、

$$\int_1^x\left(1+\frac{y}{x^2}\right)dx-\int_0^y\frac{1}{1}dy=C_1$$

$$\left[x-\frac{y}{x}\right]_1^x-y=C_1$$

$$\left(x-\frac{y}{x}\right)-\left(1-\frac{y}{1}\right)-y=C_1$$

$$x-\frac{y}{x}-1=C_1$$

$$\underline{y=x^2-Cx}$$

これは $(x,y)=(0,0)$ も満たす。

(2)　$\boldsymbol{y dx - (x + y^2) dy = 0}$

$P = y,\ Q = -(x + y^2)$ とおくと、$P_y = 1,\ Q_x = -1$ となるので、与式は完全微分方程式ではない。

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{1 - (-1)}{-(x + y^2)}$$

$$\frac{P_y - Q_x}{P} = \frac{1 - (-1)}{y} = \frac{2}{y}$$

となり、y のみの関数となるので、積分因子 λ は、

$$\lambda = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{P} dy} = e^{-\int \left(\frac{2}{y}\right) dx} = e^{-2 \log|y|} = e^{\log \frac{1}{y^2}} = \frac{1}{y^2}$$

となる。この積分定数を与式にかけると

$$\frac{1}{y^2} y dx - \frac{1}{y^2}(x + y^2) dy = 0$$

$$\frac{1}{y} dx - \left(\frac{x}{y^2} + 1\right) dy = 0$$

となる。改めて $P = \frac{1}{y},\ Q = -\left(\frac{x}{y^2} + 1\right)$ とおくと、$P_y = -\frac{1}{y^2},\ Q_x = -\frac{1}{y^2}$ となるので完全微分方程式となる。$y \neq 0$ であるから、基点を$(x_0, y_0) = (0, 1)$ とすれば、一般解は、

$$\int_0^x \frac{1}{y} dx - \int_1^y \left(\frac{0}{y^2} + 1\right) dy = C_1$$

$$\left[\frac{x}{y}\right]_0^x - [y]_1^y = C_1$$

$$\left(\frac{x}{y} - 0\right) - (y - 1) = C_1$$

$$x - y^2 = Cy$$

$$\underline{x = Cy + y^2}$$

【問題集】

次の微分方程式の一般解を求めよ。

➢ 完全微分方程式

(1)　$(2x+y)dx+(x+3y^2)dy=0$

(2)　$(-2x+\sin y)dx+(x\cdot\cos y)dy=0$

(3)　$(2x+\tan y)dx+(x+1)\cdot\sec^2 y\,dy=0$

(4)　$(2x+4y+1)dx+(4x+3y-1)dy=0$

(5)　$(x^3+2xy+y)dx+(y^3+x^2+x)dy=0$

(6)　$(y\sin x-x)dx+(y^2-\cos x)dy=0$

(7)　$3x(xy-2)dx+(x^3+2y)dy=0$

(8)　$(\cos y+y\cos x)dx+(\sin x-x\sin y)dy=0$

(9)　$(3x^2+y^2)dx+2xydy=0$

➢ 積分因子と完全微分方程式

次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1)　$\left(x-\dfrac{2y}{x}\right)dx+\left(\dfrac{e^{2y}}{x}-2\right)dy=0\quad(x>0)$

(2)　$\left(1+\dfrac{y}{x}\right)dx+\left(1-\dfrac{\cos y}{x}\right)dy=0\quad(x>0)$

(3)　$(x^2-y+1)dx+xdy=0\quad(x>0)$

(4)　$(4x+y)(y^2+1)dx+(2xy+2y^2+1)xdy=0$

(5)　$(x+y^2+1)dx+2ydy=0$

(6)　$(1-xy)dx+(xy-x^2)dy=0$

(7)　$\{\cos(xy)+y\sin(xy)\}dx+x\sin(xy)\,dy=0$

(8)　$(2x^2+y)dx+(x^2y-x)dy=0$

(9)　$(2x-y)dx+x(1+xy)dy=0$

➢ 物理への応用

(1)　断熱条件 $d'Q(=dU+pdV)=cRdT+\frac{RT}{V}dV=0$　（T,Vが変数、c,Rは定数）

は完全微分方程式ではないことを示し、積分因子を用いて一般解を求めよ。

【解答】

➢ 完全微分方程式

キャンパス・ゼミ 演習 常微分方程式 P.35 ~ 37 演習問題 15 ~ 17（レポートに出題）

(1)　$(2x+y)dx+(x+3y^2)dy=0$

$P(x,y)=2x+y,\quad Q(x,y)=x+3y^2$ とおくと、
$P_y(x,y)=1,\quad Q_x(x,y)=1$ なので、 $P_x(x,y)=Q_y(x,y)$ が成り立つ。
よって、与式は完全微分方程式であるから、この一般解は、

$$\int_0^x (2x+y)dx+\int_0^y (0+3y^2)dx=C$$

$$[x^2+yx]_0^x+[y^3]_0^y=C$$

$$\underline{x^2+xy+y^3=C\quad (C\text{は任意定数})}$$

または、

$$\int_0^x (2x+0)dx+\int_0^y (x+3y^2)dy=C$$

$$[x^2]_0^x+[xy+y^3]_0^y=C$$

$$\underline{x^2+xy+y^3=C\quad (C\text{は任意定数})}$$

(2)　$(-2x+\sin y)dx+(x\cdot\cos y)dy=0$

$P(x,y)=-2x+\sin y,\quad Q(x,y)=x\cdot\cos y$ とおくと、
$P_y(x,y)=\cos y,\quad Q_x(x,y)=\cos y$ なので、 $P_x(x,y)=Q_y(x,y)$ が成り立つ。
よって、与式は完全微分方程式であるから、この一般解は、

$$\int_0^x (-2x+\sin y)dx+\int_0^y (0\cdot\cos y)dx=C$$

$$[-x^2+x\cdot\sin y]_0^x=C$$

$$\underline{-x^2+x\sin y=C\quad (C\text{は任意定数})}$$

または、

$$\int_0^x (-2x+\sin 0)dx+\int_0^y (x\cdot\cos y)dy=C$$

$$[-x^2]_0^x+[x\sin y]_0^y=C$$

$$\underline{-x^2+x\sin y=C\quad (C\text{は任意定数})}$$

(3)　$(2x+\tan y)dx+(x+1)\cdot\sec^2 y\,dy=0$

$P(x,y)=2x+\tan y$,　$Q(x,y)=(x+1)\cdot\sec^2 y$ とおくと、
$P_y(x,y)=\sec^2 y$,　$Q_x(x,y)=\sec^2 y$ なので、 $P_x(x,y)=Q_y(x,y)$ が成り立つ。
よって、与式は完全微分方程式であるから、この一般解は、

$$\int_0^x (2x+\tan y)dx+\int_0^y (0+1)\cdot\sec^2 y\,dx=C$$

$$[x^2+x\cdot\tan y]_0^x+[\tan y]_0^y=C$$

$$x^2+x\cdot\tan y+\tan y=C$$

$$\underline{x^2+(x+1)\tan y=C\quad (C\text{は任意定数})}$$

または、

$$\int_0^x (2x+\tan 0)dx+\int_0^y \{(x+1)\cdot\sec^2 y\}dy=C$$

$$[x^2]_0^x+[(x+1)\cdot\tan y]_0^y=C$$

$$\underline{x^2+(x+1)\tan y=C\quad (C\text{は任意定数})}$$

チャート微分積分 P.354 基本例題 165

(4)　$(2x+4y+1)dx+(4x+3y-1)dy=0$　(演習に出題)

$P(x,y)=2x+4y+1$,　$Q(x,y)=4x+3y-1$ とおくと、
$P_y(x,y)=4$,　$Q_x(x,y)=4$ なので、 $P_x(x,y)=Q_y(x,y)$ が成り立つ。
よって、与式は完全微分方程式であるから、この一般解は、

$$\int_0^x (2x+4y+1)dx+\int_0^y (4\cdot 0+3y-1)dx=C$$

$$[x^2+x\cdot(4y+1)]_0^x+\left[\frac{3}{2}y^2-y\right]_0^y=C$$

$$x^2+x\cdot(4y+1)+\frac{3}{2}y^2-y=C$$

$$\underline{x^2+4xy+x+\frac{3}{2}y^2-y=C\quad (C\text{は任意定数})}$$

または、

$$\int_0^x (2x+4\cdot 0+1)dx+\int_0^y (4x+3y-1)dy=C$$

$$[x^2+x]_0^x+\left[(4x-1)y+\frac{3}{2}y^2\right]_0^y=C$$

$$x^2 + x + (4x - 1)y + \frac{3}{2}y^2 = C$$

$$\underline{x^2 + 4xy + x + \frac{3}{2}y^2 - y = C \quad (C\text{は任意定数})}$$

(5)　$(x^3 + 2xy + y)dx + (y^3 + x^2 + x)dy = 0$

$P(x,y) = x^3 + 2xy + y,\quad Q(x,y) = y^3 + x^2 + x$ とおくと、

$P_y(x,y) = 2x + 1,\quad Q_x(x,y) = 2x + 1$ なので、 $P_x(x,y) = Q_y(x,y)$ が成り立つ。

よって、与式は完全微分方程式であるから、この一般解は、

$$\int_0^x (x^3 + 2xy + y)dx + \int_0^y (y^3 + 0^2 + 0)dx = C$$

$$\left[\frac{x^4}{4} + x^2y + xy\right]_0^x + \left[\frac{y}{4}\right]_0^y = C$$

$$\underline{\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}y^4 + x^2y + xy = C \quad (C\text{は任意定数})}$$

または、

$$\int_0^x (x^3 + 2x\cdot 0 + 0)dx + \int_0^y (y^3 + x^2 + x)dy = C$$

$$\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^x + \left[\frac{y^4}{4} + x^2y + xy\right]_0^y = C$$

$$\underline{\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}y^4 + x^2y + xy = C \quad (C\text{は任意定数})}$$

(6)　$(y\sin x - x)dx + (y^2 - \cos x)dy = 0$

$P(x,y) = y\sin x - x,\quad Q(x,y) = y^2 - \cos x$ とおくと、

$P_y(x,y) = \sin x,\quad Q_x(x,y) = \sin x$ なので、 $P_x(x,y) = Q_y(x,y)$ が成り立つ。

よって、与式は完全微分方程式であるから、この一般解は、

$$\int_0^x (y\sin x - x)dx + \int_0^y (y^2 - \cos 0)dx = C$$

$$\left[-y\cos x - \frac{x^2}{2}\right]_0^x + \left[\frac{y^3}{3} - y\right]_0^y = C$$

$$\underline{-y\cos x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 = C \quad (C\text{は任意定数})}$$

または、

$$\int_0^x (0\cdot\sin x - x)dx + \int_0^y (y^2 - \cos x)dy = C$$

$$\left[-\frac{x^2}{2}\right]_0^x+\left[\frac{y^3}{3}-y\cos x\right]_0^y=C$$

$$\underline{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}y^3-y\cos x=C\quad (C\text{は任意定数})}$$

チャート微分積分 P.358 基本例題 167 (1), (3)

(7)　$\boldsymbol{3x(xy-2)dx+\left(x^3+2y\right)dy=0}$

$P(x,y)=3x(xy-2),\quad Q(x,y)=x^3+2y$ とおくと、

$P_y(x,y)=3x^2,\quad Q_x(x,y)=3x^2$ なので、 $P_x(x,y)=Q_y(x,y)$ が成り立つ。

よって、与式は完全微分方程式であるから、この一般解は、

$$\int_0^x\{3x(xy-2)\}dx+\int_0^y(0^3+2y)dx=C$$

$$[x^3y-3x^2]_0^x+[y^2]_0^y=C$$

$$\underline{x^3y-3x^2+y^2=C\quad (C\text{は任意定数})}$$

または、

$$\int_0^x\{3x(x\cdot 0-2)\}dx+\int_0^y(x^3+2y)dy=C$$

$$[-3x^2]_0^x+[x^3y+y^2]_0^y=C$$

$$\underline{-3x^2+x^3y+y^2=C\quad (C\text{は任意定数})}$$

(8)　$\boldsymbol{(\cos y+y\cos x)dx+(\sin x-x\sin y)dy=0}$

$P(x,y)=\cos y+y\cos x,\quad Q(x,y)=\sin x-x\sin y$ とおくと、

$P_y(x,y)=-\sin y+\cos x,\quad Q_x(x,y)=\cos x-\sin y$ なので、

$P_x(x,y)=Q_y(x,y)$ が成り立つ。

よって、与式は完全微分方程式であるから、この一般解は、

$$\int_0^x(\cos y+y\cos x)dx+\int_0^y(\sin 0-0\cdot\sin y)dx=C$$

$$[x\cos y+y\sin x]_0^x=C$$

$$\underline{x\cos y+y\sin x=C\quad (C\text{は任意定数})}$$

または、

$$\int_0^x(\cos 0+0\cdot\cos x)dx+\int_0^y(\sin x-x\sin y)dy=C$$

$$[x]_0^x+[y\sin x+x\cos y]_0^y=C$$

$$x + y\sin x + x\cos y - x = C$$

$$\underline{y\sin x + x\cos y = C \quad (C\text{は任意定数})}$$

チャート微分積分 P.373 重要例題 098 (3)

(9) $\boldsymbol{(3x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0}$

$P(x,y) = 3x^2 + y^2,\quad Q(x,y) = 2xy$ とおくと、

$P_y(x,y) = 2y,\quad Q_x(x,y) = 2y$ なので、 $P_x(x,y) = Q_y(x,y)$ が成り立つ。

よって、与式は完全微分方程式であるから、この一般解は、

$$\int_0^x (3x^2 + y^2)dx + \int_0^y (2\cdot 0\cdot y)dx = C$$

$$[x^3 + xy^2]_0^x = C$$

$$\underline{x^3 + xy^2 = C \quad (C\text{は任意定数})}$$

または、

$$\int_0^x (3x^2 + 0^2)dx + \int_0^y (2xy)dy = C$$

$$[x^3]_0^x + [xy^2]_0^y = C$$

$$\underline{x^3 + xy^2 = C \quad (C\text{は任意定数})}$$

➢ 積分因子と完全微分方程式

キャンパス・ゼミ 常微分方程式 P.64 ~ 65 演習問題 4, 実践問題 4（レポートに出題）

(1) $\boldsymbol{\left(x - \frac{2y}{x}\right)dx + \left(\frac{e^{2y}}{x} - 2\right)dy = 0 \quad (x > 0)}$

$P = x - \frac{2y}{x},\ Q = \frac{e^{2y}}{x} - 2$ とおくと、$P_y = -\frac{2}{x},\ Q_x = -\frac{e^{2y}}{x^2}$

となるので、与式は完全微分方程式ではない。しかし、

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{-\frac{2}{x} - \left(-\frac{e^{2y}}{x^2}\right)}{\frac{e^{2y}}{x} - 2} = \frac{\frac{e^{2y} - 2x}{x^2}}{\frac{e^{2y} - 2x}{x}} = \frac{1}{x}$$

となり、x のみの関数となるので、積分因子 λ は、

$$\lambda = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q}dx} = e^{\int \left(\frac{1}{x}\right)dx} = e^{\log|x|} = x$$

となる。この積分定数を与式にかけると

$$x\left(x-\frac{2y}{x}\right)dx+x\left(\frac{e^{2y}}{x}-2\right)dy=0$$

$$(x^2-2y)dx+(e^{2y}-2x)dy=0$$

となる。改めて $P=x^2-2y,\ Q=e^{2y}-2x$ とおくと、$P_y=-2,\ Q_x=-2$ となるので完全微分方程式となる。基点を$(x_0,y_0)=(0,0)$ とすれば、一般解は、

$$\int_0^x (x^2-2y)\,dx+\int_0^y (e^{2y}-2\cdot 0)\,dy=C_1$$

$$\left[\frac{x^3}{3}-2xy\right]_0^x+\left[\frac{1}{2}e^{2y}\right]_0^y=C_1$$

$$\frac{x^3}{3}-2xy+\frac{1}{2}(e^{2y}-1)=C_1$$

$$\underline{2x^3-12xy+3e^{2y}=C}$$

(2)　$\left(1+\frac{y}{x}\right)dx+\left(1-\frac{\cos y}{x}\right)dy=0\quad(x>0)$

$$P=1+\frac{y}{x},\qquad Q=1-\frac{\cos y}{x}\text{とおくと、}P_y=\frac{1}{x},\qquad Q_x=\frac{\cos y}{x^2}$$

となるので、与式は完全微分方程式ではない。しかし、

$$\frac{P_y-Q_x}{Q}=\frac{\frac{1}{x}-\left(\frac{\cos y}{x^2}\right)}{1-\frac{\cos y}{x}}=\frac{\frac{x-\cos y}{x^2}}{\frac{x-\cos y}{x}}=\frac{1}{x}$$

となり、x のみの関数となるので、積分因子 λ は、

$$\lambda=e^{\int\frac{P_y-Q_x}{Q}dx}=e^{\int\left(\frac{1}{x}\right)dx}=e^{\log|x|}=x$$

となる。この積分定数を与式にかけると

$$x\left(1+\frac{y}{x}\right)dx+x\left(1-\frac{\cos y}{x}\right)dy=0$$

$$(x+y)dx+(x-\cos y)dy=0$$

となる。改めて $P=x+y,\ Q=x-\cos y$ とおくと、$P_y=1,\ Q_x=1$ となるので完全微分方程式となる。基点を$(x_0,y_0)=(0,0)$ とすれば、一般解は、

$$\int_0^x (x+y)\,dx+\int_0^y (0-\cos y)\,dy=C_1$$

$$\left[\frac{x^2}{2}+xy\right]_0^x+[-\sin y]_0^y=C_1$$

$$\frac{x^2}{2}+xy-\sin y=C_1$$

$$\underline{x^2+2xy-2\sin y=C}$$

キャンパス・ゼミ 演習 常微分方程式 P.38 ~ 39 演習問題 18 ~ 19（レポートに出題）

(3)　$(x^2-y+1)dx+xdy=0$　$(x>0)$

$P=x^2-y+1,\qquad Q=x$ とおくと、$P_y=-1,\qquad Q_x=1$

となるので、与式は完全微分方程式ではない。しかし、

$$\frac{P_y-Q_x}{Q}=\frac{-1-1}{x}=\frac{-2}{x}$$

となり、x のみの関数となるので、積分因子 λ は、

$$\lambda=e^{\int\frac{P_y-Q_x}{Q}dx}=e^{\int\left(-\frac{2}{x}\right)dx}=e^{-2\log|x|}=e^{\log\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{x^2}$$

となる。この積分定数を与式にかけると

$$\frac{1}{x^2}(x^2-y+1)dx+\frac{1}{x^2}xdydy=0$$

$$\left(1-\frac{y-1}{x^2}\right)dx+\frac{1}{x}dy=0$$

となる。改めて $P=1-\frac{y-1}{x^2},\ Q=\frac{1}{x}$ とおくと、$P_y=-\frac{1}{x^2},\ Q_x=-\frac{1}{x^2}$ となるので完全微分方程式となる。$x\neq 0$ であるから、基点を $(x_0,y_0)=(1,0)$ とすれば、一般解は、

$$\int_1^x\left(1-\frac{y-1}{x^2}\right)dx+\int_0^y\left(\frac{1}{1}\right)dy=C$$

$$\left[x+\frac{y-1}{x}\right]_1^x+[y]_0^y=C$$

$$\left(x+\frac{y-1}{x}\right)-(1+y-1)+y=C$$

$$x+\frac{y-1}{x}=C$$

$$\underline{y=-x^2+Cx+1\ \ (x\neq 0)}$$

(4)　$(4x+y)(y^2+1)dx+(2xy+2y^2+1)xdy=0$

$P=(4x+y)(y^2+1),\qquad Q=(2xy+2y^2+1)x$ とおくと、

$P_y = 3y^2 + 8xy + 1, \qquad Q_x = 4xy + 2y^2 + 1$

となるので、与式は完全微分方程式ではない。しかし、

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{(3y^2 + 8xy + 1) - (4xy + 2y^2 + 1)}{(2xy + 2y^2 + 1)x} = \frac{y^2 + 4xy}{(2xy + 2y^2 + 1)x}$$

だが、

$$\frac{P_y - Q_x}{P} = \frac{(3y^2 + 8xy + 1) - (4xy + 2y^2 + 1)}{(4x + y)(y^2 + 1)} = \frac{y^2 + 4xy}{(4x + y)(y^2 + 1)} = \frac{y}{y^2 + 1}$$

となり、y のみの関数となるので、積分因子 λ は、

$$\lambda = e^{-\int \frac{P_y - Q_x}{P} dx} = e^{-\int \left(\frac{y}{y^2+1}\right) dx} = e^{-\frac{1}{2}\log(y^2+1)} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}}$$

となる。この積分定数を与式にかけると

$$\frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}}(4x + y)(y^2 + 1)dx + \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}}(2xy + 2y^2 + 1)x = 0$$

$$(4x + y)\sqrt{y^2 + 1}dx + \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}}(2xy + 2y^2 + 1)x = 0$$

となる。改めて

$P = (4x + y)\sqrt{y^2 + 1}, \qquad Q = \dfrac{1}{\sqrt{y^2 + 1}}(2xy + 2y^2 + 1)x$ とおくと

$P_y = \dfrac{4xy + 2y^2 + 1}{\sqrt{y^2 + 1}}, \qquad Q_x = \dfrac{4xy + 2y^2 + 1}{\sqrt{y^2 + 1}}$ となるので完全微分方程式となる。

基点を $(x_0, y_0) = (0, 0)$ とすれば、一般解は、

$$\int_0^x \left\{(4x + y)\sqrt{y^2 + 1}\right\} dx + \int_0^y \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}}(2 \cdot 0 \cdot y + 2y^2 + 1) \cdot 0 \, dy = C$$

$$\int_0^x \left\{(4x + y)\sqrt{y^2 + 1}\right\} dx = C$$

$$\left[(2x^2 + xy)\sqrt{y^2 + 1}\right]_0^x = C$$

$$\underline{(2x^2 + xy)\sqrt{y^2 + 1} = C}$$

チャート微分積分 P.356 基本例題 166

(5)　$(x + y^2 + 1)dx + 2ydy = 0$　(演習に出題)

$P = x + y^2 + 1, \qquad Q = 2y$ とおくと、$P_y = 2y, \qquad Q_x = 0$

となるので、与式は完全微分方程式ではない。しかし、

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{2y - 0}{2y} = 1$$

となり、x のみの関数となるので、積分因子 λ は、

$$\lambda = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q} dx} = e^{\int dx} = e^x$$

となる。この積分定数を与式にかけると

$$e^x(x + y^2 + 1)dx + 2e^x y dy = 0$$

となる。改めて $P = e^x(x + y^2 + 1),\ Q = 2e^x y$ とおくと、$P_y = 2e^x y,\ Q_x = 2e^x y$ となるので完全微分方程式となる。基点を$(x_0, y_0) = (0, 0)$ とすれば、一般解は、

$$\int_0^x e^x(x + y^2 + 1)\,dx + \int_0^y 2e^0 y\,dy = C$$

$$\int_0^x e^x(x + y^2 + 1)\,dx + \int_0^y 2y\,dy = C$$

$$[e^x(x - 1) + e^x(y^2 + 1)]_0^x + [y^2]_0^y = C$$

$$[xe^x + y^2 e^x]_0^x + [y^2]_0^y = C$$

$$xe^x + y^2 e^x - y^2 + y^2 = C$$

$$\underline{e^x(x + y^2) = C}$$

(6)　$(1 - xy)dx + (xy - x^2)dy = 0$

$P = 1 - xy,\quad Q = xy - x^2$とおくと、$P_y = -x,\quad Q_x = y - 2x$

となるので、与式は完全微分方程式ではない。しかし、

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{-x - (y - 2x)}{xy - x^2} = \frac{x - y}{x(y - x)} = -\frac{1}{x}$$

となり、x のみの関数となるので、積分因子 λ は、

$$\lambda = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q} dx} = e^{\int \left(-\frac{1}{x}\right) dx} = e^{-\log|x|} = \frac{1}{x}$$

となる。この積分定数を与式にかけると

$$\frac{1}{x}(1 - xy)dx + \frac{1}{x}(xy - x^2)dy = 0$$

$$\left(\frac{1}{x} - y\right)dx + (y - x)dy = 0$$

となる。改めて $P=\frac{1}{x}-y,\ Q=y-x$ とおくと、$P_y=-1,\ Q_x=-1$ となるので完全微分方程式となる。$x\neq 0$ であるから、基点を $(x_0,y_0)=(1,0)$ とすれば、一般解は、

$$\int_1^x\left(\frac{1}{x}-y\right)dx+\int_0^y(y-1)\,dy=C$$

$$[\log x-xy]_1^x+\left[\frac{y^2}{2}-y\right]_0^y=C$$

$$(\log x-xy)-(0-y)+\frac{y^2}{2}-y=C$$

$$\underline{\log x-xy+\frac{y^2}{2}=C}$$

(7)　$\{\cos(xy)+y\sin(xy)\}dx+x\sin(xy)\,dy=0$

$P=\cos(xy)+y\sin(xy)$,　　$Q=x\sin(xy)$ とおくと、

$P_y=(-x+1)\sin(xy)+xy\cos(xy)$,　　$Q_x=\sin(xy)+xy\cos(xy)$

となるので、与式は完全微分方程式ではない。しかし、

$$\frac{P_y-Q_x}{Q}=\frac{\{(-x+1)\sin(xy)+xy\cos(xy)\}-(\sin(xy)+xy\cos(xy))}{x\sin(xy)}$$

$$=\frac{-x\sin(xy)}{x\sin(xy)}=-1$$

となり、x のみの関数となるので、積分因子 λ は、

$$\lambda=e^{\int\frac{P_y-Q_x}{Q}dx}=e^{-\int dx}=e^{-x}$$

となる。この積分定数を与式にかけると

$$e^{-x}\{\cos(xy)+y\sin(xy)\}dx+xe^{-x}\sin(xy)\,dy=0$$

となる。改めて $P=e^{-x}\{\cos(xy)+y\sin(xy)\},\ Q=xe^{-x}\sin(xy)$ とおくと、

$$P_y=e^{-x}\{(-x+1)\sin(xy)+xy\cos(xy)\}$$

$$Q_x=e^{-x}\{(-x+1)\sin(xy)+xy\cos(xy)\}$$

となるので完全微分方程式となる。基点を $(x_0,y_0)=(0,0)$ とすれば、一般解は、

$$\int_0^x e^{-x}\{\cos(xy)+y\sin(xy)\}\,dx+\int_0^y 0\cdot e^{-x}\sin(xy)\,dy=C_1$$

$$\int_0^x e^{-x}\cos(xy)\,dx+y\int_0^x e^{-x}\sin(xy)\,dx=C_1$$

ここで、

$$\int e^{-x}\cos(xy)\,dx = \int (-e^{-x})'\cos(xy)\,dx$$

$$= (-e^{-x})\cos(xy) - \int (-e^{-x})\{-y\sin(xy)\}\,dx$$

$$= (-e^{-x})\cos(xy) - y\left\{\int e^{-x}\sin(xy)\,dx\right\}$$

$$= (-e^{-x})\cos(xy) - y\left\{\int (-e^{-x})'\sin(xy)\,dx\right\}$$

$$= (-e^{-x})\cos(xy) - y\left\{(-e^{-x})\sin(xy) - \int (-e^{-x})y\cos(xy)\,dx\right\}$$

$$= (-e^{-x})\{\cos(xy) - y\sin(xy)\} - y^2\int e^{-x}y\cos(xy)\,dx$$

$$\therefore \int e^{-x}\cos(xy)\,dx = \frac{-e^{-x}}{1+y^2}\{\cos(xy) - y\sin(xy)\}$$

同様に、

$$\int e^{-x}\sin(xy)\,dx = \frac{-e^{-x}}{1+y^2}\{\sin(xy) + y\cos(xy)\}$$

である。よって、

$$\int_0^x e^{-x}\cos(xy)\,dx + y\int_0^x e^{-x}\sin(xy)\,dx = C_1$$

$$\left[\frac{-e^{-x}}{1+y^2}\{\cos(xy) - y\sin(xy) + y\sin(xy) + y^2\cos(xy)\}\right]_0^x = C_1$$

$$[-e^{-x}\cos(xy)]_0^x = C_1$$

$$\underline{e^{-x}\cos(xy) = C}$$

チャート微分積分 P.358 基本例題 167

(8) $\boldsymbol{(2x^2+y)dx + (x^2y - x)dy = 0}$

$P = 2x^2 + y,\qquad Q = x^2y - x$とおくと、$P_y = 1,\qquad Q_x = 2xy - 1$

となるので、与式は完全微分方程式ではない。しかし、

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{1-(2xy-1)}{x^2y - x} = \frac{-2(xy-1)}{x(xy-1)} = -\frac{2}{x}$$

となり、x のみの関数となるので、積分因子 λ は、

$$\lambda = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q} dx} = e^{\int \left(-\frac{2}{x}\right) dx} = e^{-2\log|x|} = \frac{1}{x^2}$$

となる。この積分定数を与式にかけると

$$\frac{1}{x^2}(2x^2 + y)dx + \frac{1}{x^2}(x^2 y - x)dy = 0$$

$$\left(2 + \frac{y}{x^2}\right) dx + \left(y - \frac{1}{x}\right) dy = 0$$

となる。改めて $P = 2 + \frac{y}{x^2}$, $Q = y - \frac{1}{x}$ とおくと、$P_y = \frac{1}{x^2}$, $Q_x = \frac{1}{x^2}$となるので完全微分方程式となる。$x \neq 0$ であるから、基点を$(x_0, y_0) = (1, 0)$ とすれば、一般解は、

$$\int_1^x \left(2 + \frac{y}{x^2}\right) dx + \int_0^y \left(y - \frac{1}{1}\right) dy = C_1$$

$$\left[2x - \frac{y}{x}\right]_1^x + \left[\frac{y^2}{2} - y\right]_0^y = C_1$$

$$\left(2x - \frac{y}{x}\right) - (2 - y) + \frac{y^2}{2} - y = C_1$$

$$\underline{2x - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{2} = C}$$

チャート微分積分 P.373　重要例題 098 (4)

(9)　$(2x - y)dx + x(1 + xy)dy = 0$

$P = 2x - y$,　　$Q = x(1 + xy)$とおくと、$P_y = -1$,　　$Q_x = 1 + 2xy$

となるので、与式は完全微分方程式ではない。しかし、

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{-1 - (1 + 2xy)}{x(1 + xy)} = \frac{-2(1 + xy)}{x(1 + xy)} = -\frac{2}{x}$$

となり、x のみの関数となるので、積分因子 λ は、

$$\lambda = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q} dx} = e^{\int \left(-\frac{2}{x}\right) dx} = e^{-2\log|x|} = \frac{1}{x^2}$$

となる。この積分定数を与式にかけると

$$\frac{1}{x^2}(2x - y)dx + \frac{1}{x}(1 + xy)dy = 0$$

$$\left(\frac{2}{x} - \frac{y}{x^2}\right) dx + \left(\frac{1}{x} + y\right) dy = 0$$

となる。改めて $P=\left(\frac{2}{x}-\frac{y}{x^2}\right),\ Q=\left(\frac{1}{x}+y\right)$ とおくと、$P_y=-\frac{1}{x^2},\ Q_x=-\frac{1}{x^2}$ となるので完全微分方程式となる。$x\neq 0$ であるから、基点を $(x_0,y_0)=(1,0)$ とすれば、一般解は、

$$\int_1^x\left(\frac{2}{x}-\frac{y}{x^2}\right)dx+\int_0^y\left(\frac{1}{1}+y\right)dy=C$$

$$\left[2\log|x|+\frac{y}{x}\right]_1^x+\left[y+\frac{y^2}{2}\right]_0^y=C$$

$$\left(2\log|x|+\frac{y}{x}\right)-(0+y)+y+\frac{y^2}{2}=C$$

$$\underline{2\log|x|+\frac{y}{x}+\frac{y^2}{2}=C}$$

➢ 物理への応用　（レポートに出題）

(1)　断熱条件 $d'Q(=dU+pdV)=cRdT+\frac{RT}{V}dV=0$　（T,Vが変数、c,Rは定数）は完全微分方程式ではないことを示し、積分因子を用いて一般解を求めよ。

$P=cR,\qquad Q=\dfrac{RT}{V}$ とおくと、$P_V=0,\qquad Q_T=\dfrac{R}{V}$

となるので、与式は完全微分方程式ではない。しかし、

$$\frac{P_V-Q_T}{Q}=\frac{0-\left(\frac{R}{V}\right)}{\frac{RT}{V}}=-\frac{1}{T}$$

となり、T のみの関数となるので、積分因子 λ は、

$$\lambda=e^{\int\frac{P_V-Q_T}{Q}dx}=e^{\int\left(-\frac{1}{T}\right)dx}=e^{-\log|T|}=\frac{1}{T}$$

となる。この積分定数を与式にかけると

$$\frac{1}{T}\cdot cRdT+\frac{1}{T}\cdot\frac{RT}{V}dV=0$$

$$\frac{cR}{T}dT+\frac{R}{V}dV=0$$

となる。改めて $P=\frac{cR}{T},\ Q=\frac{R}{V}$ とおくと、$P_V=0,\ Q_T=0$ となるので完全微分方程式となる。$T\neq 0,\ V\neq 0$であるから、基点を $(T_0,V_0)=(1,1)$ とすれば、一般解は、

$$\int_{1}^{T} \frac{cR}{T} dT + \int_{1}^{V} \frac{R}{V} dV = C_1$$

$$cR[\log T]_1^T + R[\log V]_1^V = C_1$$

$$cR \log T + R \log V = C_1$$

$$\log T + \frac{1}{c} \log V = C_1$$

$$\underline{TV^{\frac{1}{c}} = C}$$

これをポワソンの断熱方程式という。