担当教員：西沢 望（S-305）：nishizawa.nozomi@kitasato-u.ac.jp

第 12 回 1 階線形微分方程式

今回のポイント

> 1 階線形微分方程式の解き方をマスターする
> 1. 定数変化法
> 2. ベルヌーイの微分方程式

➢ 1 階線形微分方程式

微分方程式のうち、

$$\boldsymbol{y' + P(x)y = Q(x)} \quad \cdots (1)$$

という y' および y の 1 次式の形（線形）をしたものを“**1 階線形微分方程式**”という。
さらに $Q(x) = 0$ 、すなわち

$$\boldsymbol{y' + P(x)y = 0} \quad \cdots (2)$$

の形の方程式を“**同次方程式**”または“**斉次方程式**”という。
これに対して$Q(x) \neq 0$のとき、“**非同次方程式**”または“**非斉次方程式**”という。
さらに、式 (1) に対する式 (2) を**“同伴方程式”**という。
1 階線形微分方程式の解法を**“定数変化法”**という。

➢ 定数変化法

同次方程式である式 (1) を解く。
最初にこの同伴方程式である非同次方程式、式 (2) を解く。これは変数分離系であるから

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y, \qquad \int \frac{1}{y}\,dy = -\int P(x)\,dx$$

$$\log|y| = -\int P(x)\,dx + C_1$$

$$|y| = e^{-\int P(x)dx + C_1}$$

$$\therefore \underline{y = Ce^{-\int P(x)dx}}$$

このとき、求めた解の定数 C を $u(x)$ におき換えて、非同次方程式に代入すると、特殊解を求めることができる。

$$y = u(x)e^{-\int P(x)dx}$$

を式 (1) に代入する。

$$\left\{u(x)e^{-\int P(x)dx}\right\}' + P(x)u(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

第一項は、

$$\left\{u(x)e^{-\int P(x)dx}\right\}' = \{u(x)\}'e^{-\int P(x)dx} + u(x)\left\{e^{-\int P(x)dx}\right\}'$$

$$= u'(x)e^{-\int P(x)dx} + u(x)\left\{-\int P(x)\,dx\right\}' e^{-\int P(x)dx}$$

$$= u'(x)e^{-\int P(x)dx} - P(x)u(x)e^{-\int P(x)dx}$$

となるので代入すると、

$$u'(x)e^{-\int P(x)dx} - P(x)u(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)u(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$u'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$\frac{du(x)}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

となり、“直接積分型” となる。これを解くと、

$$u(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx + C$$

以上より、求める非同次方程式の解は、

$$\underline{y = e^{-\int P(x)dx}\left\{\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx + C\right\}}$$

となる。

1 階線形微分方程式の解法

1 階線形微分方程式 $y' + P(x)y = Q(x)$ $\cdots(1)$ について

(i)　まず、その同伴方程式 $y' + P(x)y = 0$ $\cdots(2)$ の一般解

$y = Ce^{-\int P(x)dx}$ $\cdots(3)$を求める。

(ii)　次に、式(3) の任意定数C を $u(x)$ とおき換えて、

$y = u(x)e^{-\int P(x)dx}$ $\cdots(3)'$ として、(1) に代入して、

$$u(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx + C$$

を求め、これを(3)' に代入して、(1) の一般解

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left\{\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx + C\right\}$$

を求める。

例題

(1) $\boldsymbol{y' - 2y = e^x}$

(i) まず、求める式の同伴方程式 $y' - 2y = 0$ を解く。

$$\frac{dy}{dx} - 2y = 0 \quad \frac{dy}{y} = 2dx$$

$$y = Ce^{2x}$$

(ii) ここで、任意定数 C を $u(x)$ とおき換えて、$y = u(x)e^{2x}$ 。これを求める式に代入して、

$$\{u(x)e^{2x}\}' - 2u(x)e^{2x} = e^x$$

$$u'(x)e^{2x} + u(x) \cdot 2e^{2x} - 2u(x)e^{2x} = e^x$$

$$u'(x)e^{2x} = e^x$$

$$u'(x) = e^{-x}$$

$$u(x) = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C$$

これを代入して、

$$y = (-e^{-x} + C)e^{2x}$$

$$\underline{y = e^x + Ce^{2x}}$$

(2) $\boldsymbol{y' + \frac{1}{x}y = \frac{2}{x^2+1} \quad (x > 0)}$

(i) まず、求める式の同伴方程式 $y' + \frac{1}{x}y = 0$ を解く。

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = 0 \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

$$\log|y| = -\log|x| + C_1$$

$$\log|y| = \log\frac{e^{C_1}}{x} \quad (\because x > 0)$$

$$y = \pm\frac{e^{C_1}}{x}$$

$$y = \frac{C}{x}$$

(ii) ここで、任意定数 C を $u(x)$ とおき換えて、$y = \frac{u(x)}{x}$ 。これを求める式に代入して、

$$\left\{\frac{u(x)}{x}\right\}' + \frac{u(x)}{x^2} = \frac{2}{x^2+1}$$

$$\frac{u'(x)}{x} - \frac{u(x)}{x^2} + \frac{u(x)}{x^2} = \frac{2}{x^2+1}$$

$$\frac{u'(x)}{x} = \frac{2}{x^2+1}$$

$$u'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$u(x) = \int \frac{2x}{x^2+1}dx = \log(x^2+1) + C \quad (\because x > 0)$$

これを代入して、

$$\underline{y = \frac{1}{x}\{\log(x^2+1) + C\}}$$

(3) $\boldsymbol{y' - y \cdot \tan x = 2\sin x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})}$

(i)　まず、求める式の同伴方程式 $y' - y \cdot \tan x = 0$ を解く。

$$\frac{dy}{dx} - y \cdot \tan x = 0 \qquad \frac{dy}{y} = \tan x\, dx$$

$$\log|y| = -\log(\cos x) + C_1 \quad (\because 0 < x < \frac{\pi}{2})$$

$$\log|y| = \log\frac{e^{C_1}}{\cos x} \quad (\because x > 0)$$

$$y = \pm\frac{e^{C_1}}{\cos x}$$

$$y = \frac{C}{\cos x}$$

(ii)　ここで、任意定数C を $u(x)$ とおき換えて、$y = \frac{u(x)}{\cos x}$。これを求める式に代入して、

$$\left\{\frac{u(x)}{\cos x}\right\}' - \frac{u(x)}{\cos x} \cdot \tan x = 2\sin x$$

$$\frac{u'(x)}{\cos x} + \frac{u(x)}{\cos x} \cdot \tan x - \frac{u(x)}{\cos x} \cdot \tan x = 2\sin x$$

$$\frac{u'(x)}{\cos x} = 2\sin x$$

$$u'(x) = 2\sin x \cos x$$

$$u(x) = \int 2\sin x \cos x\, dx = \sin^2 x + C$$

これを代入して、

$$\underline{y = \frac{1}{\cos x}\{\sin^2 x + C\}}$$

1 階線形微分方程式の解の公式

1 階線形微分方程式 $y' + P(x)y = Q(x)\ \cdots(1)$ の一般解は

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left\{\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx + C\right\}$$

である。

以降は、問題に制限がない限り公式として用いてもよい。（ただし、符号に注意）

➢ ベルヌーイの微分方程式

1 階線形微分方程式のうち、

$$\boldsymbol{y' + P(x)y = Q(x)y^n}\quad \cdots(1)\quad \left(n\text{は 0 と 1 以外の整数}\right)$$

を“**ベルヌーイの微分方程式**”という。

$y \neq 0$ として、y^n を消去するため両辺に y^{-n} をかけると、

$$y^{-n}y' + P(x)y^{-n+1} = Q(x)\quad \cdots(1)'$$

ここで、$(y^{-n+1})' = (-n+1)y^{-n}\cdot y'$ となるので、両辺に $(-n+1)$ をかけて

$$\underbrace{(-n+1)y^{-n}y'}_{(y^{-n+1})''} + (-n+1)P(x)y^{-n+1} = (-n+1)Q(x)$$

ここでそれぞれ

$$\underbrace{(y^{-n+1})'}_{u'(x)} + \underbrace{(-n+1)P(x)}_{P_0(x)}\,\underbrace{y^{-n+1}}_{u(x)} = \underbrace{(-n+1)Q(x)}_{Q_0(x)}$$

とおけば、

$$u'(x) + P_0(x)u(x) = Q_0(x)$$

となり、$u(x)$ に対する 1 階線形微分方程式となる。

ベルヌーイの微分方程式の解法

ベルヌーイの微分方程式 $y' + P(x)y = Q(x)y^n\ \cdots(1)\ (n \neq 0,\ 1)$ について

$y \neq 0$ として、両辺に y^{-n} をかけて、

$$(-n+1)y^{-n}y' + (-n+1)P(x)y^{-n+1} = (-n+1)Q(x)$$
$$(y^{-n+1})' + (-n+1)P(x)\,y^{-n+1} = (-n+1)Q(x)$$

ここで、$y^{-n+1}=u$ とおくと、

$$u'(x)+P_0(x)u(x)=Q_0(x)$$

と、$u(x)$ に対する 1 階線形微分方程式となるので、これを解いて、$u=y^{-n+1}$ を代入して一般解を求める。

なお、$n=0,\ 1$ のときは、それぞれ 1 階線形微分方程式、変数分離形となるのでここでは言及しない。また、$y=0$ も解ではあるが物理的に意味を成さないので省略する。
さらに、$n=2$ のベルヌーイの微分方程式は前回学んだロジスティック方程式にあたる。

例題

(1) $\boldsymbol{y'+\frac{1}{x}y=-2x^2y^2\quad (x>0)}$

$n=2$ のベルヌーイの微分方程式なので、$(-n+1)y^{-n}=-y^{-2}$ を両辺にかけて

$$-y^{-2}y'-\frac{1}{x}y^{-1}=2x^2$$

ここで $y^{-1}=u$ とおくと、

$$u'-\frac{1}{x}u=2x^2$$

となり、一階線形微分方程式となる。解の公式より

$$u=e^{-\int -\frac{1}{x}dx}\left\{\int 2x^2e^{\int -\frac{1}{x}dx}\,dx+C\right\}$$

$$u=x\left\{\int 2x^2\cdot\frac{1}{x}dx+C\right\}$$

$$u=x\left\{\int 2x\,dx+C\right\}$$

$$u=x^3+Cx$$

$$y^{-1}=x^3+Cx$$

$$\therefore\ \underline{y=\frac{1}{x^3+Cx}}$$

(2) $\boldsymbol{y'-xy=-e^{-x^2}y^3\quad (x>0)}$

$n=3$ のベルヌーイの微分方程式なので、$(-n+1)y^{-n}=-2y^{-3}$ を両辺にかけて

$$-2y^{-3}y'+2xy^{-2}=2e^{-x^2}$$

ここで $y^{-2}=u$ とおくと、

$$u'+2xu=2e^{-x^2}$$

となり、一階線形微分方程式となる。解の公式より

$$u = e^{-\int 2x dx}\left\{\int 2e^{-x^2} e^{\int 2x dx}\, dx + C\right\}$$

$$u = e^{-x^2}\left\{\int 2e^{-x^2} e^{x^2}\, dx + C\right\}$$

$$u = e^{-x^2}\left\{\int 2\, dx + C\right\}$$

$$u = e^{-x^2}\{2x + C\}$$
$$y^{-2} = e^{-x^2}\{2x + C\}$$

$$\therefore\ \underline{y^2 = \frac{e^{x^2}}{2x + C}}$$

(1) $\boldsymbol{y' - \frac{1}{3x}y = -\frac{4}{3}y^4 \log x \quad (x > 0)}$

$n = 4$ のベルヌーイの微分方程式なので、$(-n+1)y^{-n} = -3y^{-4}$ を両辺にかけて

$$-3y^{-4}y' + \frac{1}{x}y^{-3} = 4\log x$$

ここで $y^{-3} = u$ とおくと、

$$u' + \frac{1}{x}u = 4\log x$$

となり、一階線形微分方程式となる。解の公式より

$$u = e^{-\int \frac{1}{x} dx}\left\{\int 4\log x\, e^{\int \frac{1}{x} dx}\, dx + C\right\}$$

$$u = \frac{1}{x}\left\{\int 4x\log x\, dx + C\right\}$$

ここで、

$$\int 4x\log x\, dx = \int (2x^2)'\log x\, dx = 2x^2\log x - \int 2x^2\frac{1}{x}dx$$
$$= 2x^2\log x - x^2 = x^2(2\log x - 1)$$

であるから、

$$u = \frac{1}{x}\{x^2(2\log x - 1) + C\}$$

$$y^{-3} = \frac{1}{x}\{x^2(2\log x - 1) + C\}$$

$$\therefore\ \underline{y^3 = \frac{x}{x^2(2\log x - 1) + C}}$$

【問題集】

1 階線形微分方程式

次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1)　$y' - y = e^{2x}$

(2)　$y' - 2xy = -2x$

(3)　$xy' - y = x^2$

(4)　$y' + \dfrac{y}{x} = e^x$

(5)　$y' + y = x$

(6)　$y' - 2y = e^{3x}$

(7)　$y' - y = -2\sin x$

(8)　$xy' + y = x\log x$

(9)　$y' + y \cdot \cos x = \sin x \cos x$

(10)　$y' - 2xy = -2x^3$

(11)　$y' - y = 2x$

(12)　$y' + \dfrac{1}{x+1} y = \cos x \quad (x + 1 > 0)$

(13)　$y' + \dfrac{1}{x} y - x^2 = 0$

(14)　$y' + 2y - 3e^{4x} = 0$

(15)　$y' + y \cdot \tan x = \dfrac{1}{\cos x}$

(16)　$y' = -\dfrac{\sin y + x}{\cos y}$

(17)　$y' = ax + by + c \quad (b \neq 0)$

➢ ベルヌーイの微分方程式

次のベルヌーイの微分方程式の一般解を求めよ。

(1)　$xy' - y = y^2 \log x$

(2)　$y' + \dfrac{2}{3x} y = -\dfrac{1}{3} e^x x^2 y^4 \quad (x > 0)$

(3)　$y' + \dfrac{2}{x} y = \sqrt{y} \quad (x > 0)$

(4)　$x^3 y' = x^2 y - y^4 \cos x$

➢ 物理への応用

ロジスティック方程式

$$\frac{dN(t)}{dt} = k_0 \left(1 - \frac{N}{M}\right) N(t)$$

をベルヌーイの微分方程式として一般解を求めよ。

【解答】

➢ 1 階線形微分方程式

物理数学教科書 P.11 問題 5

（1）　$\boldsymbol{y' - y = e^{2x}}$

$P(x) = -1,\ Q(x) = e^{2x}$ であるから、

$$y = e^{\int 1dx}\left\{\int e^{2x}e^{-\int 1dx}\,dx + C\right\}$$

$$= e^{x}\left\{\int e^{2x}e^{-x}\,dx + C\right\}$$

$$\underline{y = e^{2x} + Ce^{x}}$$

（2）　$\boldsymbol{y' - 2xy = -2x}$

$P(x) = -2x,\ Q(x) = -2x$ であるから、

$$y = e^{\int 2xdx}\left\{-\int 2xe^{-\int 2xdx}\,dx + C\right\}$$

$$= e^{x^2}\left\{-\int 2xe^{-x^2}\,dx + C\right\}$$

$$= e^{x^2}\left\{e^{-x^2} + C\right\}$$

$$\underline{y = 1 + Ce^{x^2}}$$

物理数学教科書 P.12 演習問題［5］（レポートに出題）

（3）　$\boldsymbol{xy' - y = x^2}$

両辺を x で割れば、　$y' - \dfrac{1}{x}y = x$

$P(x) = -\frac{1}{x},\ Q(x) = x$ であるから、

$$y = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left\{\int xe^{-\int \frac{1}{x}dx}\,dx + C\right\}$$

$$= x\left\{\int x \cdot \frac{1}{x}dx + C\right\}$$

$$\underline{y = x(x + C)}$$

(4) $\boldsymbol{y' + \frac{y}{x} = e^x}$

$P(x) = \frac{1}{x},\ Q(x) = e^x$ であるから、

$$y = e^{-\int \frac{1}{x} dx}\left\{\int e^x e^{\int \frac{1}{x} dx}\,dx + C\right\}$$

$$= \frac{1}{x}\left\{\int e^x \cdot x\,dx + C\right\}$$

$$= \frac{1}{x}\{xe^x - e^x + C\}$$

$$\underline{y = \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^x + \frac{C}{x}}$$

微分積分教科書 P.203 問 4 (1)~(4)（演習、レポートに出題）

(5) $\boldsymbol{y' + y = x}$

$P(x) = 1,\ Q(x) = x$ であるから、

$$y = e^{-\int 1 dx}\left\{\int x e^{\int 1 dx}\,dx + C\right\}$$

$$= e^{-x}\left\{\int x \cdot e^x\,dx + C\right\}$$

$$= e^{-x}\{xe^x - e^x + C\}$$

$$\underline{y = (x - 1) + Ce^{-x}}$$

(6) $\boldsymbol{y' - 2y = e^{3x}}$

$P(x) = -2,\ Q(x) = e^{3x}$ であるから、

$$y = e^{\int 2 dx}\left\{\int e^{3x} e^{-\int 2 dx}\,dx + C\right\}$$

$$= e^{2x}\left\{\int e^{3x} \cdot e^{-2x}\,dx + C\right\}$$

$$\underline{y = e^{2x}(e^x + C)}$$

(7) $\boldsymbol{y' - y = -2\sin x}$

$P(x) = -1,\ Q(x) = -2\sin x$ であるから、

$$y = e^{\int 1 dx}\left\{\int -2\sin x\, e^{-\int 1 dx}\,dx + C\right\}$$

$$= e^x\left\{-2\int \sin x \cdot e^{-x}\, dx + C\right\}$$

ここで、

$$\int \sin x \cdot e^{-x}\, dx = \int \sin x \cdot (-e^{-x})'\, dx = \sin x \cdot (-e^{-x}) - \int \cos x \cdot (-e^{-x})\, dx$$

$$= \sin x \cdot (-e^{-x}) - \int \cos x \cdot (e^{-x})'\, dx$$

$$= \sin x \cdot (-e^{-x}) - \left\{\cos x \cdot (e^{-x}) - \int (-\sin x) \cdot (e^{-x})\, dx\right\}$$

$$= -e^{-x}(\sin x + \cos x) - \int \sin x \cdot e^{-x}\, dx$$

よって、

$$\int \sin x \cdot e^{-x}\, dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x)$$

これを代入して、

$$y = e^x\{e^{-x}(\sin x + \cos x) + C\}$$

$$\underline{y = \sin x + \cos x + Ce^x}$$

(8)　$\boldsymbol{xy' + y = x\log x}$

両辺を x で割れば、　　$y' + \frac{1}{x}y = \log x$

$P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = \log x$ であるから、

$$y = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left\{\int \log x\, e^{\int \frac{1}{x}dx}\, dx + C\right\}$$

$$= \frac{1}{x}\left\{\int \log x \cdot x\, dx + C\right\}$$

ここで、

$$\int x\log x\, dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \log x\, dx = \frac{x^2}{2}\log x - \int \left(\frac{x^2}{2}\right)\frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\log x - \frac{1}{2}\int x\, dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}$$

これを代入して、

$$y=\frac{1}{x}\left\{\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}+C\right\}$$

$$\underline{y=\frac{x}{2}\log x-\frac{x}{4}+\frac{C}{x}}$$

キャンパス・ゼミ 常微分方程式 P.50 演習問題 3, 実践問題 3

(9)　$y'+y\cdot\cos x=\sin x\cos x$

$P(x)=\cos x$，$Q(x)=\sin x\cos x$ であるから、

$$y=e^{-\int\cos x dx}\left\{\int\sin x\cos x\, e^{\int\cos x dx}\,dx+C\right\}$$

$$=e^{-\sin x}\left\{\int\sin x\cos x\cdot e^{\sin x}\,dx+C\right\}=e^{-\sin x}\left\{\int\sin x\left(e^{\sin x}\right)'dx+C\right\}$$

$$=e^{-\sin x}\left\{\sin x\cdot e^{\sin x}-\int\cos x\cdot e^{\sin x}\,dx+C\right\}$$

$$=e^{-\sin x}\left\{\sin x\cdot e^{\sin x}-\int\left(e^{\sin x}\right)'dx+C\right\}=e^{-\sin x}\{\sin x\cdot e^{\sin x}-e^{\sin x}+C\}$$

$$\underline{y=(\sin x-1)+Ce^{-\sin x}}$$

(10)　$y'-2xy=-2x^3$

$P(x)=-2x$, $Q(x)=-2x^3$ であるから、

$$y=e^{-\int-2xdx}\left\{\int-2x^3e^{\int-2xdx}\,dx+C\right\}$$

$$=e^{x^2}\left\{\int-2x^3e^{-x^2}\,dx+C\right\}=e^{x^2}\left\{\int x^2\cdot\left(e^{-x^2}\right)'dx+C\right\}$$

$$=e^{x^2}\left\{x^2\cdot e^{-x^2}-\int2x\cdot e^{-x^2}\,dx+C\right\}=e^{x^2}\left\{x^2\cdot e^{-x^2}+\int\left(e^{-x^2}\right)'dx+C\right\}$$

$$=e^{x^2}\{x^2\cdot e^{-x^2}+e^{-x^2}+C\}$$

$$\underline{y=(x^2-1)+Ce^{x^2}}$$

キャンパス・ゼミ 演習 常微分方程式 P.26～27 演習問題 9～10

(11)　$y'-y=2x$

$P(x)=-1$, $Q(x)=2x$ であるから、

$$y = e^{-\int -1dx}\left\{\int 2xe^{\int -1dx}\,dx + C\right\}$$

$$= e^{x}\left\{\int 2x\cdot e^{-x}dx + C\right\} = e^{x}\left\{\int 2x\cdot(-e^{-x})'\,dx + C\right\}$$

$$= e^{x}\left\{2x\cdot(-e^{-x}) - \int 2\cdot(-e^{-x})\,dx + C\right\}$$

$$= e^{x}\{2x\cdot(-e^{-x}) - 2e^{-x} + C\}$$

$$\underline{y = -2(x+1)e^{x} + Ce^{x}}$$

(12) $\boldsymbol{y' + \dfrac{1}{x+1}y = \cos x \quad (x+1>0)}$

$P(x) = \frac{1}{x+1}$, $Q(x) = \cos x$ であるから、

$$y = e^{-\int \frac{1}{x+1}dx}\left\{\int \cos x\cdot e^{\int \frac{1}{x+1}dx}\,dx + C\right\}$$

$$= \frac{1}{x+1}\left\{\int \cos x\cdot(x+1)\,dx + C\right\} = \frac{1}{x+1}\left\{\int (\sin x)'\cdot(x+1)\,dx + C\right\}$$

$$= \frac{1}{x+1}\left\{\sin x\cdot(x+1) - \int \sin x\,dx + C\right\} = \frac{1}{x+1}\{\sin x\cdot(x+1) + \cos x + C\}$$

$$\underline{y = \sin x + \frac{\cos x + C}{x+1}}$$

チャート微分積分 P.360 基本例題 168

(13) $\boldsymbol{y' + \dfrac{1}{x}y - x^2 = 0}$

$P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = x^2$ であるから、

$$y = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left\{\int x^2 e^{\int \frac{1}{x}dx}\,dx + C\right\}$$

$$= \frac{1}{x}\left\{\int x^2\cdot x\,dx + C\right\}$$

$$\underline{y = \frac{x^3}{4} + \frac{C}{x}}$$

(14) $\boldsymbol{y' + 2y - 3e^{4x} = 0}$

$P(x) = 2$, $Q(x) = 3e^{4x}$ であるから、

$$y = e^{-\int 2dx}\left\{\int 3e^{4x}e^{\int 2dx}\,dx + C\right\}$$

$$= e^{-2x}\left\{\int 3e^{4x}e^{2x}\,dx + C\right\}$$

$$= e^{-2x}\left\{\int 3e^{6x}\,dx + C\right\}$$

$$= e^{-2x}\left\{\frac{1}{2}e^{6x} + C\right\}$$

$$\underline{y = \frac{1}{2}e^{4x} + Ce^{-2x}}$$

チャート微分積分 P.380 重要例題 103

（15） $\boldsymbol{y' + y \cdot \tan x = \dfrac{1}{\cos x}}$

$P(x) = \tan x$, $Q(x) = \frac{1}{\cos x}$ であるから、

$$y = e^{-\int \tan x dx}\left\{\int \frac{1}{\cos x}e^{\int \tan x dx}\,dx + C\right\}$$

$$= \cos x\left\{\int \frac{1}{\cos^2 x}dx + C\right\}$$

$$= \cos x\,\{\tan x + C\}$$

$$\underline{y = \sin x + C\cos x}$$

オリジナル

（16） $\boldsymbol{y' = -\dfrac{\sin y + x}{\cos y}}$

両辺を $\cos y$ をかければ、　$\cos y \cdot y' + \sin y = -x$

ここで、$u = \sin y$ とおけば、$u' = \cos y \cdot y'$ となるので、与式は、

$$u' + u = -x$$

$P(x) = 1$, $Q(x) = -x$ であるから、

$$u = e^{-\int 1dx}\left\{\int -xe^{\int 1dx}\,dx + C\right\}$$

$$= e^{-x}\left\{-\int xe^{x}\,dx + C\right\}$$

$$= e^{-x}\{-(x-1)e^{x} + C\}$$

$$= -(x-1) + Ce^{-x}$$

よって、

$$\underline{y = \sin^{-1}\{-(x-1) + Ce^{-x}\}}$$

(17)　$y' = ax + by + c$　$(b \neq 0)$

与式は、$y' - by = ax + c$

$P(x) = -b,\ Q(x) = ax + c$ であるから、

$$y = e^{\int b\,dx}\left\{\int (ax+c)e^{-\int b\,dx}\,dx + C\right\}$$

$$= e^{bx}\left\{\int (ax+c)e^{-bx}\,dx + C\right\}$$

ここで、

$$\int xe^{-bx}\,dx = \int x\left(\frac{e^{-bx}}{-b}\right)'dx = x\left(\frac{e^{-bx}}{-b}\right) - \int \left(\frac{e^{-bx}}{-b}\right)dx$$

$$= x\left(\frac{e^{-bx}}{-b}\right) - \left(\frac{e^{-bx}}{b^2}\right)$$

よって、

$$y = e^{bx}\left\{ax\left(\frac{e^{-bx}}{-b}\right) - a\left(\frac{e^{-bx}}{b^2}\right) + c\left(\frac{e^{-bx}}{-b}\right) + C\right\}$$

$$\underline{y = -\frac{ax+c}{b} - \frac{a}{b^2} + Ce^{bx}}$$

➢ ベルヌーイの微分方程式

次のベルヌーイの微分方程式の一般解を求めよ。

微分積分教科書 P.203 問 4 (5)

(1)　$xy' - y = y^2 \log x$

x で両辺を割ると

$$y' - \frac{1}{x}y = \frac{y^2}{x}\log x$$

であるから、$n = 2$ のベルヌーイの微分方程式なので、$(-n+1)y^{-n} = -y^{-2}$ を両辺にかけて

$$-y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = -\frac{1}{x}\log x$$

ここで $y^{-1} = u$ とおくと、

$$u' + \frac{1}{x}u = -\frac{1}{x}\log x$$

となり、一階線形微分方程式となる。

解の公式より$P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = -\frac{1}{x}\log x$ であるから、

$$u = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left\{\int -\frac{1}{x}\log x\, e^{\int \frac{1}{x}dx}\,dx + C\right\} = \frac{1}{x}\left\{-\int \log x\,dx + C\right\}$$

ここで、

$$\int \log x\,dx = \int (x)'\log x\,dx = x\log x - \int dx = x(\log x - 1)$$

よって、

$$u = \frac{1}{x}\{x(1 - \log x) + C\}$$

$$y^{-1} = \frac{1}{x}\{x(1 - \log x) + C\}$$

$$\therefore\ y = \underline{\frac{x}{x(1 - \log x) + C}}$$

キャンパス・ゼミ 演習 常微分方程式 P.28 ~ 29 演習問題 11 ~ 12（レポートに出題）

(2) $\boldsymbol{y' + \frac{2}{3x}y = -\frac{1}{3}e^x x^2 y^4 \quad (x > 0)}$

$n = 4$ のベルヌーイの微分方程式なので、$(-n+1)y^{-n} = -3y^{-4}$ を両辺にかけて

$$-3y^{-4}y' - \frac{2}{x}y^{-3} = e^x x^2$$

ここで $y^{-3} = u$ とおくと、

$$u' - \frac{2}{x}u = e^x x^2$$

となり、一階線形微分方程式となる。解の公式より$P(x) = -\frac{2}{x}$, $Q(x) = e^x x^2$ であるから、

$$u = e^{-\int -\frac{2}{x}dx}\left\{\int e^x x^2 e^{\int -\frac{2}{x}dx}\,dx + C\right\} = x^2\left\{\int e^x\,dx + C\right\} = x^2(e^x + C)$$

$$y^{-3} = x^2(e^x + C)$$

$$\therefore\ \underline{y^3 = \frac{1}{x^2(e^x + C)}}$$

(3)　$y' + \frac{2}{x}y = \sqrt{y}$　$(x > 0)$

$n = \frac{1}{2}$ のベルヌーイの微分方程式なので、$(-n+1)y^{-n} = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$ を両辺にかけて

$$\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y' + \frac{1}{x}y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

ここで $y^{\frac{1}{2}} = u$ とおくと、

$$u' + \frac{1}{x}u = \frac{1}{2}$$

となり、一階線形微分方程式となる。解の公式より$P(x) = \frac{1}{x},\ Q(x) = \frac{1}{2}$ であるから、

$$u = e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left\{\int \frac{1}{2}e^{\int\frac{1}{x}dx}\,dx + C\right\} = \frac{1}{x}\left\{\frac{1}{2}\int x\,dx + C\right\} = \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{4} + C\right) = \frac{x}{4} + \frac{C}{x}$$

$$y^{\frac{1}{2}} = \frac{x}{4} + \frac{C}{x}$$

$$\therefore\ \underline{y = \left(\frac{x}{4} + \frac{C}{x}\right)^2}$$

$\boxed{\text{オリジナル}}$

(4)　$x^3y' = x^2y - y^4\cos x$

x^3 で両辺を割って整理すると

$$y' - \frac{1}{x}y = -\frac{y^4}{x^3}\cos x$$

であるから、$n = 4$ のベルヌーイの微分方程式なので、$(-n+1)y^{-n} = -3y^{-4}$ を両辺にかけて

$$-3y^{-4}y' + \frac{3}{x}y^{-3} = \frac{3}{x^3}\cos x$$

ここで $y^{-3} = u$ とおくと、

$$u' + \frac{3}{x}u = \frac{3}{x^3}\cos x$$

となり、一階線形微分方程式となる。解の公式より$P(x) = \frac{3}{x},\ Q(x) = \frac{3}{x^3}\cos x$ であるから、

$$u = e^{-\int\frac{3}{x}dx}\left\{\int \frac{3}{x^3}\cos x\, e^{\int\frac{3}{x}dx}\,dx + C\right\}$$

$$= \frac{1}{x^3}\left\{3\int \cos x\,dx + C\right\}$$

$$= \frac{1}{x^3}\{3\sin x + C\}$$

$$y^{-3} = \frac{1}{x^3}\{3\sin x + C\}$$

$$\therefore\ \underline{y^3 = \frac{x^3}{3\sin x + C}}$$

➢ 物理への応用　（レポートに出題）

ロジスティック方程式

$$\frac{dN(t)}{dt} = k_0\left(1 - \frac{N}{M}\right)N(t)$$

をベルヌーイの微分方程式として一般解を求めよ。

与式を整理すると、

$$N' - k_0 N = -k_0\frac{N^2}{M}$$

であるから、$n = 2$ のベルヌーイの微分方程式なので、$(-n+1)N^{-n} = -N^{-2}$ を両辺にかけて

$$-N^{-2}N' + k_0 N^{-1} = \frac{k_0}{M}$$

ここで $N^{-1} = u$ とおくと、

$$u' + k_0 u = \frac{k_0}{M}$$

となり、一階線形微分方程式となる。解の公式より$P(x) = k_0,\ Q(x) = \frac{k_0}{M}$ であるから、

$$u = e^{-\int k_0 dx}\left\{\int \frac{k_0}{M} e^{\int k_0 dx}\,dx + C\right\}$$

$$= e^{-k_0 x}\left\{\frac{1}{M}e^{k_0 x} + C\right\} = \frac{1 + Ce^{-k_0 x}}{M}$$

$$N^{-1} = \frac{1 + Ce^{-k_0 x}}{M}$$

$$\therefore\ \underline{\frac{N}{M} = \frac{1}{1 + Ce^{-k_0 x}}}$$