担当教員：西沢 望（S-305）：nishizawa.nozomi@kitasato-u.ac.jp

第 13 回 2 階線形微分方程式（I）

今回のポイント

1. 2 階線形微分方程式の解の構造
2. 定数係数 2 階同次微分方程式の解法
3. オイラー型微分方程式

➢ 2 階線形微分方程式

$y'', y', y,\ x$ を含む関係式のうち、

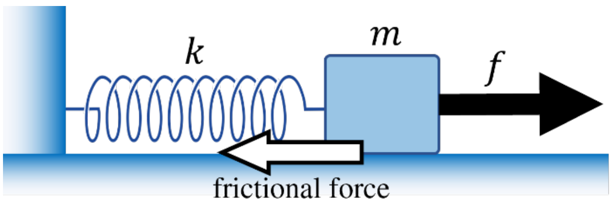
$$\boldsymbol{y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)} \quad \cdots (1)$$

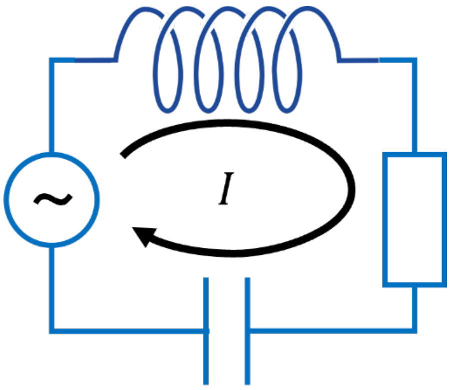
という y'', y' および y の 1 次式の形（線形）をしたものを“**2 階線形微分方程式**”という。
さらに $R(x) = 0$ 、すなわち

$$\boldsymbol{y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0} \quad \cdots (2)$$

の形の方程式を“**同次方程式**”または“**斉次方程式**”という。
これに対して$R(x) \neq 0$のとき、“**非同次方程式**”または“**非斉次方程式**”という。
さらに、式 (1) に対する式 (2) を **“同伴方程式”** という。

➢ 物理における 2 階線形微分方程式の例





左図のような水平な床の上に質量 m の物体がバネ定数 k のバネにつながれており、床からの摩擦力 $-m\gamma\, dx/dt$ 、外力 f もはたらいている場合

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - m\gamma\frac{dx}{dt} + f(t)$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+m\gamma\frac{dx}{dt}+kx=f(t)$$

となり、2 階線形微分方程式の形となる。

また、右図のように交流電圧電源 $V(t)$ に直列にコイル L、抵抗 R、キャパシタ C がつながったLCR回路を流れる電流を $I(t)$ とすると、

$$L\frac{dI(t)}{dt}+RI(t)+\frac{Q(t)}{C}=V(t)$$

が成り立つ。これをもう一度 t で微分すると、

$$L\frac{d^2I(t)}{dt^2}+R\frac{dI(t)}{dt}+\frac{I}{C}=\frac{dV(t)}{dt}$$

となり、2 階線形微分方程式の形となる。

振動現象をともなう物理現象の殆どは現象論的にはこのような 2 階線形微分方程式で記述される。

➢ 2 階線形微分方程式の解

2 階線形微分方程式

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x)\quad\cdots(1)$$

の同伴方程式を

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0\quad\cdots(2)$$

を解いていく。

(1) の一般解と特殊解をそれぞれ y と y_0 とおき、(2) の一般解を Y とおく。

y と y_0 は (1) の解であるから (1) に代入しても成り立つ。

$$\begin{cases} y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x) & \cdots(3) \\ {y_0}''+P(x){y_0}'+Q(x)y_0=R(x) & \cdots(4) \end{cases}$$

$(3)-(4)$より、

$$(y''-{y_0}'')+P(x)(y'-{y_0}')+Q(x)(y-y_0)=0$$

$$(y-y_0)''+P(x)(y-y_0)'+Q(x)(y-y_0)=0\quad\cdots(5)$$

となる。この式は、$(y-y_0)$ が (2) の一般解 Y であることを示している。すなわち

$$Y''+P(x)Y'+Q(x)Y=0\quad\cdots(6)$$

(5) と (6) より $y-y_0=Y$ であるから、

$$y=y_0+Y$$

となる。すなわち、(1) の一般解は特殊解と同伴方程式の和の形で表される。

次に、同伴方程式の解 Y がどのような形になるか調べてみよう。
同伴方程式 (2) の解が Y_1 と Y_2 であるする。その線形結合 $C_1Y_1 + C_2Y_2$（C_1, C_2 は定数）を (2) の左辺に代入すると、

$$
\begin{aligned}
&(C_1Y_1 + C_2Y_2)'' + P(x)(C_1Y_1 + C_2Y_2)' + Q(x)(C_1Y_1 + C_2Y_2) \\
&= C_1Y_1'' + C_2Y_2'' + P(x)C_1Y_1' + P(x)C_2Y_2' + Q(x)C_1Y_1 + Q(x)C_2Y_2 \\
&= C_1\underbrace{(Y_1'' + P(x)Y_1' + Q(x)Y_1)}_{=0\ (\because Y_1 \text{は}(2)\text{の解})} + C_2\underbrace{(Y_2'' + P(x)Y_2' + Q(x)Y_2)}_{=0\ (\because Y_2 \text{は}(2)\text{の解})} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となって、線形結合 $C_1Y_1 + C_2Y_2$ も (2) の解であることがわかる。
このような (2) の解が Y_1 と Y_2 について、

$C_1Y_1 + C_2Y_2 = 0$ が、

- $C_1 = C_2 = 0$ のときしか成り立たない、すなわち、一方が他方の定数倍でないとき、Y_1 と Y_2 は互いに **1 次独立**であるという。
- C_1 と C_2 のうち少なくとも 1 つが 0 でないとき、すなわち、一方が他方の定数倍であるとき、Y_1 と Y_2 は互いに **1 次従属**であるという。

1 次独立である Y_1 と Y_2 を (2) の**基本解**といい、(2) の一般解 Y は $Y = C_1Y_1 + C_2Y_2$ で表される。

Y_1 と Y_2 が 1 次独立であるかどうかを判定するものとして**ロンスキアン（ロンスキー行列式）**というものを導入する。ロンスキアン $W(Y_1, Y_2)$ の定義は

$$
W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{vmatrix} = Y_1Y_2' - Y_1'Y_2
$$

であり、

「$W(Y_1, Y_2) \neq 0$ のとき、Y_1 と Y_2 は 1 次独立な解となる」

［証明］
Y_1 と Y_2 が 1 次従属であるとすると、

$$
C_1Y_1 + C_2Y_2 = 0 \cdots (\text{ア})\ \text{を満たす}\ C_1 \text{と} C_2 \text{について} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{である。}
$$

(ア) の両辺を微分して、$C_1Y_1' + C_2Y_2' = 0 \cdots$ (イ) となる。(ア) と (イ) をまとめると

$$
\begin{bmatrix} C_1Y_1 + C_2Y_2 \\ C_1Y_1' + C_2Y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

ここで $\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ であるから、$\begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1{}' & Y_2{}' \end{vmatrix} = 0$ であり、これは $W(Y_1, Y_2)=0$ であることを示す。

よって、対偶が示されたので、

「$W(Y_1, Y_2) \neq 0$ のとき、Y_1 と Y_2 は 1 次独立な解となる」

は証明された。

以上をまとめると、2 階線形微分方程式の解は

2 階線形微分方程式の解

2 階線形微分方程式 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \quad \cdots (1)$ の特殊解を y_0 とおく。

(1) の同伴方程式 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad \cdots (2)$ の一般解を $Y = C_1Y_1 + C_2Y_2$ とおくと

(1) の一般解は、

$$y = y_0 + C_1Y_1 + C_2Y_2$$

で表される。

例

(1) 微分方程式 $y'' - y' - 2y = 0 \cdots$ (A)について、$Y_1 = e^{2x}, Y_2 = e^{-x}$ が基本解であることを示し、一般解を求めよ。

(2) 微分方程式 $y'' - y' - 2y = e^x \cdots$ (B) について、$y_0 = -\frac{1}{2}e^x$ が特殊解であることを示し、一般解を求めよ。

(1) $Y_1 = e^{2x}$を (A) の左辺に代入すると、

$$(e^{2x})'' - (e^{2x})' - 2e^{2x} = 4e^{2x} - 2e^{2x} - 2e^{2x} = 0$$

また、$Y_2 = e^{-x}$を (A) の左辺に代入すると、

$$(e^{-x})'' - (e^{-x})' - 2e^{-x} = e^{-x} + e^{-x} - 2e^{-x} = 0$$

となるので、いずれも (A) の解である。ロンスキアン $W(Y_1, Y_2)$ は

$$\begin{aligned} W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1{}' & Y_2{}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-x} \\ 2e^{2x} & -e^{-x} \end{vmatrix} &= e^{2x}(-e^{-x}) - e^{-x}(2e^{2x}) = -e^x - 2e^x = -e^x \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

よって、Y_1 と Y_2 は 1 次独立であるので、(A) の一般解は

$$\underline{Y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}}$$

(2) $y_0 = -\frac{1}{2}e^x$ を(B)の左辺に代入すると

$$\left(-\frac{1}{2}e^x\right)'' - \left(-\frac{1}{2}e^x\right)' - 2\left(-\frac{1}{2}e^x\right) = \left(-\frac{1}{2}e^x\right) - \left(-\frac{1}{2}e^x\right) - 2\left(-\frac{1}{2}e^x\right) = e^x$$

となり、右辺に一致するので、y_0 は(B)の特殊解である。以上より、(B)の一般解は、

$$y = y_0 + Y = \underline{-\frac{1}{2}e^x + C_1e^{2x} + C_2e^{-x}}$$

➢ 定数係数の場合の同伴方程式(定数係数 2 階同次微分方程式)の解法

同伴方程式のうち、係数が定数である

$$y'' + ay' + by = 0 \quad \cdots(7)$$

の一般解 $Y = C_1Y_1 + C_2Y_2$ を解く。この式の解として

$$y = e^{\lambda x}$$

と仮定する。この解を(7)に代入すると

$$\lambda^2e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x} = 0$$
$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0$$

$e^{\lambda x} \neq 0$ であるから $e^{\lambda x}$ で割って

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad \cdots(8)$$

この λ についての 2 次方程式を(7)の微分方程式の**特性方程式**と呼ぶ。(8)の 2 解をλ_1, λ_2 とすると、(7)の一般解は判別式 D から以下のように分類することができる。

定数係数 2 階同次微分方程式の解法

定数係数 2 階同次微分方程式 $y'' + ay' + by = 0$ の一般解は
この特性方程式

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

の判別式 D により以下のようになる。

(i) $\underline{D = a^2 - 4b > 0}$ のとき、すなわち異なる実数解 λ_1, λ_2 をもつとき、
- 基本解: $\boldsymbol{e^{\lambda_1 x}},\ \boldsymbol{e^{\lambda_2 x}}$
- 一般解: $\underline{\boldsymbol{Y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}}}$

(ii) $\underline{D = a^2 - 4b = 0}$ のとき、すなわち 1 つの重解 λ_1 をもつとき、
- 基本解: $\boldsymbol{e^{\lambda_1 x}},\ \boldsymbol{xe^{\lambda_1 x}}$
- 一般解: $\underline{\boldsymbol{Y = (C_1 + xC_2)e^{\lambda_1 x}}}$

(iii) $\underline{D = a^2 - 4b < 0}$ のとき、すなわち相異なる共役な虚数解

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta \ \left(\alpha = -\frac{a}{2},\ \beta = \frac{\sqrt{-D}}{2}\right)$$ をもつとき、

- 基本解：　$\boldsymbol{e^{\alpha x}\cos\beta x}$，$\boldsymbol{e^{\alpha x}\sin\beta x}$
- 一般解：　$\underline{\boldsymbol{Y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)}}$

(ただし、C_1，C_2 は任意定数である。)

(i) について

このとき、特性方程式は、異なる実数解 λ_1, λ_2 をもつので、

基本解は、$Y_1 = e^{\lambda_1 x}$，$Y_2 = e^{\lambda_2 x}$ となる。このとき、ロンスキアンは、

$$W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_2 e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} - \lambda_1 e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} = \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0\ (\because\ \lambda_2 \neq \lambda_1)}\underbrace{e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}}_{\neq 0}$$

$$\neq 0$$

となるので、一般解は、$Y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ となる。

(ii) について

$Y_1 = e^{\lambda_1 x}$，$Y_2 = xe^{\lambda_1 x}$ のとき、Y_2 を微分すると

$$Y_2' = e^{\lambda_1 x} + x\lambda_1 e^{\lambda_1 x} = (\lambda_1 x + 1)e^{\lambda_1 x}$$

$$Y_2'' = \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + (\lambda_1 x + 1)\lambda_1 e^{\lambda_1 x} = \left({\lambda_1}^2 x + 2\lambda_1\right)e^{\lambda_1 x}$$

となる。これを (7) の左辺に代入すると、

$$\left({\lambda_1}^2 x + 2\lambda_1\right)e^{\lambda_1 x} + a(\lambda_1 x + 1)e^{\lambda_1 x} + bxe^{\lambda_1 x}$$

$$= \underbrace{\left({\lambda_1}^2 + a\lambda_1 + b\right)}_{= 0\ (\because\ 特性方程式の解)}xe^{\lambda_1 x} + \underbrace{(2\lambda_1 + a)}_{= 0\ (\because\ 解と係数の関係)}e^{\lambda_1 x}$$

$$= 0$$

となり、Y_2 も (7) の解であることが分かる。このとき、ロンスキアンは、

$$W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & xe^{\lambda_1 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & (\lambda_1 x + 1)e^{\lambda_1 x} \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda_1 x + 1)e^{2\lambda_1 x} - \lambda_1 x e^{2\lambda_1 x} = e^{2\lambda_1 x}$$

$$\neq 0$$

となるので、一般解は、$Y = (C_1 + xC_2)e^{\lambda_1 x}$ となる。

(iii) の証明

$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$ であるとき、基本解は、

$$Y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x}$$
$$Y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x}$$

となる。このとき、ロンスキアンは、

$$W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix}$$
$$= \lambda_2 e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} - \lambda_1 e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} = (\underbrace{\lambda_2 - \lambda_1}_{= -2i\beta}) e^{(\underbrace{\lambda_1+\lambda_2}_{= 2\alpha})x}$$
$$\neq 0$$

となって 1 次独立であるので、Y_1 と Y_2 は基本解となる。

また、これらの解はオイラーの公式を使って

$$e^{\lambda x} = e^{(\alpha \pm i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{\pm i\beta x}$$
$$= e^{\alpha x}\{\cos(\pm\beta x) + i\sin(\pm\beta x)\}$$

オイラーの公式
$e^{iz} = \cos z + i \sin z$

と書くことができる。一般解は、任意定数をA_1, A_2 を使うと、

$$Y = A_1 e^{\lambda_1 x} + A_2 e^{\lambda_2 x}$$
$$= A_1 e^{\alpha x}\{\cos\beta x + i\sin\beta x\} + A_2 e^{\alpha x}\{\cos(-\beta x) + i\sin(-\beta x)\}$$
$$= A_1 e^{\alpha x}\{\cos\beta x + i\sin\beta x\} + A_2 e^{\alpha x}\{\cos\beta x - i\sin\beta x\}$$
$$= e^{\alpha x}\{(A_1 + A_2)\cos\beta x + i(A_1 - A_2)\sin\beta x\}$$

ここで $(A_1 + A_2) = C_1, i(A_1 - A_2) = C_2$ とおきなおせば、

$$= e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$$

となる。このときの実数関数

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

を新たに基本解と考えることができる。

例題

次の定数係数 2 階同次微分方程式の一般解を求めよ。

(1)　$\boldsymbol{y'' - y' - 2y = 0}$

(2)　$\boldsymbol{y'' + 4y' + 4y = 0}$

(3)　$\boldsymbol{y'' + 4y = 0}$

(4)　$\boldsymbol{y'' + y' + \frac{17}{4}y = 0}$

(1)　$\boldsymbol{y'' - y' - 2y = 0}$

特性方程式 $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ を解くと、$(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$ より $\lambda = 2, -1$

よって、基本解は、e^{2x}, e^{-x} であるから、

与式の一般解は $\underline{y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} \ \left(C_1, C_2 \text{ は任意定数}\right)}$ となる。

(2)　$\boldsymbol{y'' + 4y' + 4y = 0}$

特性方程式 $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ を解くと、$(\lambda + 2)^2 = 0$ より $\lambda = -2$ (重解)

よって、基本解は、e^{-2x}, xe^{-2x} であるから、

与式の一般解は $\underline{y = (C_1 + xC_2)e^{-2x} \ \left(C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}\right)}$ となる。

(3)　$\boldsymbol{y'' + 4y = 0}$

特性方程式 $\lambda^2 + 4 = 0$ を解くと、$\lambda^2 = -4$ より $\lambda = \pm 2i$

よって、基本解は、$\cos 2x$, $\sin 2x$ であるから、

与式の一般解は $\underline{y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x \ \left(C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}\right)}$ となる。

(4)　$\boldsymbol{y'' + y' + \frac{17}{4}y = 0}$

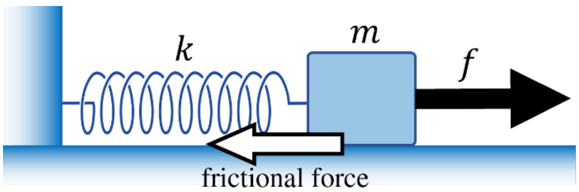
特性方程式 $\lambda^2 + \lambda + \frac{17}{4} = 0$ を解くと、$4\lambda^2 + 4\lambda + 17 = 0$ より

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 17}}{4} = -\frac{1}{2} \pm 2i$$

よって、基本解は、$e^{-\frac{1}{2}x} \cos 2x$, $e^{-\frac{1}{2}x} \sin 2x$ であるから、

与式の一般解は $\underline{y = e^{-\frac{1}{2}x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) \ \left(C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}\right)}$ となる。

➢ <u>バネの例を解いてみる（外力なし）</u>



目頭で示したバネの例を解いてみる。最初に外力も摩擦力もない場合を考えると、

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

となる。これは例題（3）と同じ形になるので、一般解は

$$x = C_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

となる。$\frac{k}{m}=4$ とすれば（3）と全くおなじとなり、初期条件として、$t=0$ のとき、$x=1, \dot{x}=\frac{dx}{dt}=0$ とすると、$C_1=1,\ C_2=0$ となるので、

$$x=\cos 2t$$

となる。これは単振動であり、重りの動きは左下図のようになる。
さらに速度に比例する摩擦力が働く場合には、

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-m\gamma\frac{dx}{dt}$$

$$\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\frac{k}{m}x=0$$

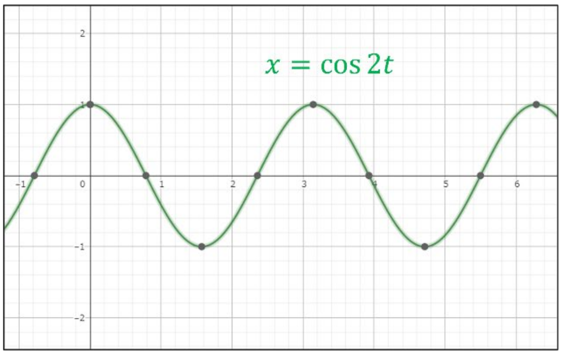
となる。これは例題（4）と同じ形になるので、一般解は

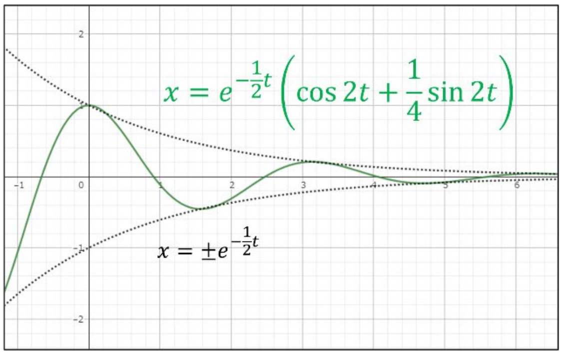
$$x=e^{-\frac{1}{2}\gamma t}\left(C_1\cos\frac{1}{2}\sqrt{4\frac{k}{m}-\gamma^2}t+C_2\sin\frac{1}{2}\sqrt{4\frac{k}{m}-\gamma^2}t\right)$$

となる。$\gamma=1,\ \frac{k}{m}=\frac{17}{4}$ とすれば（4）と全くおなじとなり、初期条件として、$t=0$ のとき、$x=1, \dot{x}=\frac{dx}{dt}=0$ とすると、$C_1=1,\ C_2=\frac{1}{4}$ となるので、

$$x=e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos 2t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)$$

となる。これは減衰振動であり、重りの動きは右下図のようになる。





➢ オイラー型同次微分方程式

$$\boldsymbol{x^2y''+axy'+by=0}$$

と言うかたちの同次微分方程式を**オイラー型微分方程式**という。
$\boldsymbol{y=x^\lambda}$ とおくと、$y'=\lambda x^{\lambda-1},\ y''=\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$ となるので、代入すると

$$\lambda(\lambda-1)x^{\lambda}+a\lambda x^{\lambda}+bx^{\lambda}=0$$
$$x^{\lambda}\{\lambda^2+(a-1)\lambda+b\}=0$$

となる。$x^{\lambda}\neq 0$ であるから、

$$\lambda^2+(a-1)\lambda+b=0$$

という特性方程式を得る。この特性方程式も解の種類によって以下のように分類できる。

オイラー型微分方程式の解

オイラー型微分方程式 $x^2y''+axy'+by=0$ の一般解は
$y=x^{\lambda}$ とおいてできる この特性方程式

$$\lambda^2+(a-1)\lambda+b=0$$

の判別式 D により以下のようになる。

(i) $\underline{D=(a-1)^2-4b>0}$ のとき、すなわち異なる実数解 λ_1,λ_2 をもつとき、
- 基本解：　$\boldsymbol{x^{\lambda_1},\ x^{\lambda_2}}$
- 一般解：　$\underline{\boldsymbol{Y=C_1x^{\lambda_1}+C_2x^{\lambda_2}}}$

(ii) $\underline{D=(a-1)^2-4b=0}$ のとき、すなわち 1 つの重解 λ_1 をもつとき、
- 基本解：　$\boldsymbol{x^{\lambda_1},\ x^{\lambda_1}\log x}$
- 一般解：　$\underline{\boldsymbol{Y=(C_1+C_2\log x)x^{\lambda_1}}}$

(iii) $\underline{D=(a-1)^2-4b<0}$ のとき、すなわち相異なる共役な虚数解

$\lambda_1=\alpha+i\beta,\lambda_2=\alpha-i\beta\ \left(\alpha=-\frac{a}{2},\ \beta=\frac{\sqrt{-D}}{2}\right)$をもつとき、
- 基本解：　$\boldsymbol{x^{\alpha}\cos(\beta\log x),\ x^{\alpha}\sin(\beta\log x)}$
- 一般解：　$\underline{\boldsymbol{Y=x^{\alpha}\{C_1\cos(\beta\log x)+C_2\sin(\beta\log x)\}}}$

(ただし、$C_1,\ C_2$ は任意定数である。)

(ii) の導出（参考）

$y_1=x^{\lambda_1}$ にたいして、$y_2=u(x)x^{\lambda_1}$ とおくと、

$$y_2{}'=u'x^{\lambda_1}+u\lambda_1x^{\lambda_1-1}$$
$$y_2{}''=u''x^{\lambda_1}+2\lambda_1u'\lambda_1x^{\lambda_1-1}+\lambda_1(\lambda_1-1)ux^{\lambda_1-2}$$

これを微分方程式に代入すると、

$$u''x^{\lambda_1+2}+2\lambda_1u'\lambda_1x^{\lambda_1+1}+\lambda_1(\lambda_1-1)ux^{\lambda_1}+a\left\{u'x^{\lambda_1+1}+u\lambda_1x^{\lambda_1}\right\}+bux^{\lambda_1}=0$$

$$u''x^{\lambda_1+2}+\underbrace{(2\lambda_1+a)}_{=0\ \left(\because\ \lambda_1=\frac{1-a}{2}\right)}u'x^{\lambda_1+1}+\left\{\underbrace{\lambda_1{}^2+(a-1)\lambda_1+b}_{=0\ (\because\ \text{特性方程式の解})}\right\}ux^{\lambda_1}=0$$

よって、

$$u''x^{\lambda_1+2}+u'x^{\lambda_1+1}+=0$$

となる。x^{λ_1+1} で割ると

$$u''x + u' = 0$$

$u' = p$ とおくと、

$$p'x + p = 0$$

となり、これは変数分離系の微分方程式になるので、

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dx}{x}$$

$$\log|p| = \log\frac{C}{x}$$

$$p = \frac{du}{dx} = \pm\frac{C}{x}$$

$$\therefore\ \underline{u = \log x}$$

となる。よって、もう一つの基本解は $y_2 = x^{\lambda_1}\log x$ となる。

オイラーの公式
$e^{iz} = \cos z + i\sin z$

(iii)の導出（参考）

$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$ であるとき、基本解は、

$$x^\lambda = x^{\alpha\pm i\beta} = x^\alpha x^{\pm i\beta} = x^\alpha e^{\pm i\beta\log x}$$
$$= x^\alpha\{\cos(\beta\log x) \pm i\sin(\beta\log x)\}$$

となるから、一般解は、任意定数をA_1, A_2

$$Y = A_1x^{\lambda_1} + A_2x^{\lambda_2}$$
$$= A_1x^\alpha\{\cos(\beta\log x) + i\sin(\beta\log x)\} + A_2x^\alpha\{\cos(\beta\log x) - i\sin(\beta\log x)\}$$
$$= x^\alpha\{(A_1 + A_2)\cos(\beta\log x) + i(A_1 - A_2)\sin(\beta\log x)\}$$

ここで $(A_1 + A_2) = C_1, i(A_1 - A_2) = C_2$ とおきなおせば、

$$= x^\alpha\{C_1\cos(\beta\log x) + C_2\sin(\beta\log x)\}$$

となる。このときの実数関数

$$y_1 = x^\alpha\cos(\beta\log x),\quad y_2 = x^\alpha\sin(\beta\log x)$$

を新たに基本解と考えることができる。

例題

次のオイラー型微分方程式の一般解を求めよ。

(1)　$\boldsymbol{x^2y'' + 2xy' - 2y = 0}$

(2)　$\boldsymbol{x^2y'' - 5xy' + 9y = 0}$

(3)　$\boldsymbol{x^2y'' - xy' + 4y = 0}$

(1)　$\boldsymbol{x^2y'' + 2xy' - 2y = 0}$

オイラー型微分方程式 $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$ について、$y = x^\lambda$ とおいてできる特性方程式

担当教員：西沢 望（S-305）：nishizawa.nozomi@kitasato-u.ac.jp

$$\lambda^2+\lambda-2=0$$

を解くと、$\lambda=1,-2$ となる。よって、基本解は、x^1, x^{-2} であるから、

与式の一般解は $\underline{y=C_1x+C_2x^{-2}\ \left(C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}\right)}$ となる。

(2)　$\boldsymbol{x^2y''-5xy'+9y=0}$

オイラー型微分方程式 $x^2y''-5xy'+9y=0$ について、$y=x^\lambda$ とおいてできる特性方程式

$$\lambda^2-6\lambda+9=0$$

を解くと、$\lambda=3$ (重解)となる。よって、基本解は、x^3, $x^3\log x$ であるから、

与式の一般解は $\underline{y=(C_1+C_2\log x)x^3\ \left(C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}\right)}$ となる。

(3)　$\boldsymbol{x^2y''-xy'+4y=0}$

オイラー型微分方程式 $x^2y''-xy'+4y=0$ について、$y=x^\lambda$ とおいてできる特性方程式

$$\lambda^2-2\lambda+4=0$$

を解くと、$\lambda=1\pm\sqrt{3}i$ となる。よって、基本解は、

$$y_1=x\cos\left(\sqrt{3}\log x\right),\quad y_2=x\sin\left(\sqrt{3}\log x\right)$$

与式の一般解は $\underline{y=x\left\{C_1\cos\left(\sqrt{3}\log x\right)+C_2\sin\left(\sqrt{3}\log x\right)\right\}\ \left(C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}\right)}$

となる。

【問題集】

➢ 定数係数 2 階同次微分方程式

次の微分方程式の一般解を求めよ。

（1）　$y'' + y' - 6y = 0$

（2）　$y'' - 6y' + 9y = 0$

（3）　$y'' - 2y' + 3y = 0$

（4）　$y'' + 5y' + 4y = 0$

（5）　$y'' - 4y' + 4y = 0$

（6）　$y'' + 3y' + 4y = 0$

（7）　$y'' - 5y' + 4y = 0$

（8）　$y'' + 4y' + 4y = 0$

（9）　$y'' - 3y' + 4y = 0$

（10）　$y'' - 3y' + 2y = 0$

（11）　$y'' + 2y' + y = 0$

（12）　$y'' - 2y' + 2y = 0$

（13）　$y'' - 5y' + 6y = 0$

（14）　$y'' + 6y' + 9y = 0$

（15）　$y'' + y = 0$

（16）　$y'' + 2y' + 4y = 0$

次の微分方程式の特解を求めよ。

（1）　$y'' - y' - 6y = 0$　初期条件 $y(0) = 2,\quad y'(0) = 6$

（2）　$y'' - 3y' + 2y = 0$　初期条件 $y(0) = 1,\quad y'(0) = 0$

(3) $y'' - 10y' + 25y = 0$　初期条件 $y(0) = 0,\quad y'(0) = 1$

(4) $y'' + y' + y = 0$　初期条件 $y(0) = 1,\quad y'(0) = 1$

(5) $y'' + 3y' + 2y = 0$　初期条件 $y(0) = 1,\quad y'(0) = 0$

(6) $y'' + 10y' + 25y = 0$　初期条件 $y(0) = 0,\quad y'(0) = 1$

(7) $y'' - y' + y = 0$　初期条件 $y(0) = 1,\quad y'(0) = -1$

- **オイラー型非同次微分方程式**

次のオイラー型非同次微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $x^2y'' - xy' - 3y = 0$

(2) $x^2y'' + xy' - 4y = 0$

(3) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$

【解答】

➢ 定数係数 2 階同次微分方程式

次の微分方程式の一般解を求めよ。

物理数学教科書 P.22 例 2.2

（1） $\boldsymbol{y'' + y' - 6y = 0}$

特性方程式 $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ を解くと、$(\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$ より $\lambda = 3, -2$

よって、基本解は、e^{3x}, e^{-2x} であるから、

与式の一般解は $\underline{y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x} \ \left(C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}\right)}$ となる。

（2） $\boldsymbol{y'' - 6y' + 9y = 0}$

特性方程式 $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ を解くと、$(\lambda - 3)^2 = 0$ より $\lambda = 3$ (重解)

よって、基本解は、e^{3x}, xe^{3x} であるから、

与式の一般解は $\underline{y = (C_1 + xC_2)e^{3x} \ \left(C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}\right)}$ となる。

（3） $\boldsymbol{y'' - 2y' + 3y = 0}$

特性方程式 $\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$ を解くと、

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 3}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}i$$

よって、基本解は、$e^x \cos\sqrt{2}x$, $e^x \sin\sqrt{2}x$ であるから、

与式の一般解は $\underline{y = e^x\left(C_1 \cos\sqrt{2}x + C_2 \sin\sqrt{2}x\right) \ \left(C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}\right)}$ となる。

物理数学教科書 P.23 問題 1

（4） $\boldsymbol{y'' + 5y' + 4y = 0}$

特性方程式 $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$ を解くと、$(\lambda + 4)(\lambda + 1) = 0$ より $\lambda = -4, -1$

よって、基本解は、e^{-4x}, e^{-x} であるから、

与式の一般解は $\underline{y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-x} \ \left(C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}\right)}$ となる。

（5） $\boldsymbol{y'' - 4y' + 4y = 0}$

特性方程式 $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ を解くと、$(\lambda - 2)^2 = 0$ より $\lambda = 2$ (重解)

よって、基本解は、e^{2x}, xe^{2x} であるから、

与式の一般解は $\underline{y = (C_1 + xC_2)e^{2x} \ \left(C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}\right)}$ となる。

（6）　$\boldsymbol{y'' + 3y' + 4y = 0}$

特性方程式 $\lambda^2 + 3\lambda + 4 = 0$ を解くと、

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 4}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i$$

よって、基本解は、$e^{-\frac{3}{2}x} \cos\frac{\sqrt{7}}{2}x$， $e^{-\frac{3}{2}x} \sin\frac{\sqrt{7}}{2}x$ であるから、

与式の一般解は $\underline{y = e^{-\frac{3}{2}x}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) \ \left(C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}\right)}$ となる。

物理数学教科書 P.35 演習問題［1］(レポートに出題)

（7）$\boldsymbol{y'' - 5y' + 4y = 0}$

特性方程式 $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$ を解くと、$(\lambda - 4)(\lambda - 1) = 0$ より $\lambda = 4, 1$

よって、基本解は、e^{4x}， e^x であるから、

与式の一般解は $\underline{y = C_1 e^{4x} + C_2 e^x \ \left(C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}\right)}$ となる。

（8）　$\boldsymbol{y'' + 4y' + 4y = 0}$

特性方程式 $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ を解くと、$(\lambda + 2)^2 = 0$ より $\lambda = -2$ (重解)

よって、基本解は、e^{-2x}， xe^{-2x} であるから、

与式の一般解は $\underline{y = (C_1 + xC_2)e^{-2x} \ \left(C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}\right)}$ となる。

（9）　$\boldsymbol{y'' - 3y' + 4y = 0}$

特性方程式 $\lambda^2 - 3\lambda + 4 = 0$ を解くと、

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 4}}{2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i$$

よって、基本解は、$e^{\frac{3}{2}x} \cos\frac{\sqrt{7}}{2}x$， $e^{\frac{3}{2}x} \sin\frac{\sqrt{7}}{2}x$ であるから、

与式の一般解は $\underline{y = e^{\frac{3}{2}x}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) \ \left(C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}\right)}$ となる。

微分積分教科書 P.204 例 7

（10）　$\boldsymbol{y'' - 3y' + 2y = 0}$

特性方程式 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ を解くと、$(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$ より $\lambda = 2, 1$

よって、基本解は、e^{2x}， e^x であるから、

与式の一般解は $\underline{y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x \ \left(C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}\right)}$ となる。

(11) $\boldsymbol{y'' + 2y' + y = 0}$

特性方程式 $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ を解くと、$(\lambda + 1)^2 = 0$ より $\lambda = -1$ (重解)

よって、基本解は、e^{-x}, xe^{-x} であるから、

与式の一般解は $\underline{y = (C_1 + xC_2)e^{-x} \ \left(C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}\right)}$ となる。

(12) $\boldsymbol{y'' - 2y' + 2y = 0}$

特性方程式 $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ を解くと、

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 2}}{2} = 1 \pm i$$

よって、基本解は、$e^x \cos x$, $e^x \sin x$ であるから、

与式の一般解は $\underline{y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) \ \left(C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}\right)}$ となる。

微分積分教科書 P.205 問 5 (演習に出題)

(13) $\boldsymbol{y'' - 5y' + 6y = 0}$

特性方程式 $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ を解くと、$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$ より $\lambda = 2, 3$

よって、基本解は、e^{2x}, e^{3x} であるから、

与式の一般解は $\underline{y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} \ \left(C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}\right)}$ となる。

(14) $\boldsymbol{y'' + 6y' + 9y = 0}$

特性方程式 $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ を解くと、$(\lambda + 3)^2 = 0$ より $\lambda = -3$ (重解)

よって、基本解は、e^{-3x}, xe^{-3x} であるから、

与式の一般解は $\underline{y = (C_1 + xC_2)e^{-3x} \ \left(C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}\right)}$ となる。

(15) $\boldsymbol{y'' + y = 0}$

特性方程式 $\lambda^2 + 1 = 0$ を解くと、

$$\lambda = \pm i$$

よって、基本解は、$\cos x$, $\sin x$ であるから、

与式の一般解は $\underline{y = C_1 \cos x + C_2 \sin x \ \left(C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}\right)}$ となる。

(16) $\boldsymbol{y'' + 2y' + 4y = 0}$

特性方程式 $\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0$ を解くと、

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 4}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

よって、基本解は、$e^{-x}\cos\sqrt{3}x$, $e^{-x}\sin\sqrt{3}x$ であるから、

与式の一般解は $\underline{y = e^{-x}\left(C_1\cos\sqrt{3}x + C_2\sin\sqrt{3}x\right) \ \left(C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}\right)}$ となる。

次の微分方程式の特解を求めよ。

物理数学教科書 P.23 例 2.3

(1) $\boldsymbol{y'' - y' - 6y = 0}$ **初期条件** $\boldsymbol{y(0) = 2,\quad y'(0) = 6}$

特性方程式 $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ を解くと、$(\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$ より $\lambda = 3, -2$
よって、一般解は $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-2x}$ となる。
初期条件より、

$$y(0) = C_1 + C_2 = 2, \qquad y'(0) = 3C_1 - 2C_2 = 6$$

これを解いて、$C_1 = 2,\ C_2 = 0$ となる。以上より、与式の特解は

$$\underline{y = 2e^{3x}}$$

物理数学教科書 P.23 問題 2

(2) $\boldsymbol{y'' - 3y' + 2y = 0}$ **初期条件** $\boldsymbol{y(0) = 1,\quad y'(0) = 0}$

特性方程式 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ を解くと、$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$ より $\lambda = 1, 2$
よって、一般解は $y = C_1e^{x} + C_2e^{2x}$ となる。
初期条件より、

$$y(0) = C_1 + C_2 = 1, \qquad y'(0) = C_1 + 2C_2 = 0$$

これを解いて、$C_1 = 2,\ C_2 = -1$ となる。以上より、与式の特解は

$$\underline{y = 2e^{x} - e^{2x}}$$

(3) $\boldsymbol{y'' - 10y' + 25y = 0}$ **初期条件** $\boldsymbol{y(0) = 0,\quad y'(0) = 1}$

特性方程式 $\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$ を解くと、$(\lambda - 5)^2 = 0$ より $\lambda = 5$ (重解)
よって、一般解は $y = (C_1 + xC_2)e^{5x}$ となる。
初期条件より、

$$y(0) = C_1 = 0, \qquad y'(0) = C_1 + C_2 = 1$$

これを解いて、$C_1 = 0,\ C_2 = 1$ となる。以上より、与式の特解は

$$\underline{y = xe^{5x}}$$

(4) $\boldsymbol{y'' + y' + y = 0}$ **初期条件** $\boldsymbol{y(0) = 1,\quad y'(0) = 1}$

特性方程式 $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ を解くと、

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

よって、一般解は $y=e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ となる。

初期条件より、

$$y(0)=C_1=1,\qquad y'(0)=-\frac{1}{2}C_1+\frac{\sqrt{3}}{2}C_2=1$$

これを解いて、$C_1=1,\ C_2=\sqrt{3}$ となる。以上より、与式の特解は

$$\underline{y=e^{-\frac{1}{2}x}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}$$

物理数学教科書 P.35 演習問題［2］(レポートに出題)

(5)　$y''+3y'+2y=0$　初期条件 $y(0)=1,\qquad y'(0)=0$

特性方程式 $\lambda^2+3\lambda+2=0$ を解くと、$(\lambda+1)(\lambda+2)=0$ より $\lambda=-1,-2$

よって、一般解は $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$ となる。

初期条件より、

$$y(0)=C_1+C_2=1,\qquad y'(0)=C_1+2C_2=0$$

これを解いて、$C_1=2,\ C_2=-1$ となる。以上より、与式の特解は

$$\underline{y=2e^{-x}-e^{-2x}}$$

(6)　$y''+10y'+25y=0$　初期条件 $y(0)=0,\qquad y'(0)=1$

特性方程式 $\lambda^2+10\lambda+25=0$ を解くと、$(\lambda+5)^2=0$ より $\lambda=\ -5$ (重解)

よって、一般解は $y=(C_1+xC_2)e^{-5x}$ となる。

初期条件より、

$$y(0)=C_1=0,\qquad y'(0)=C_1+C_2=1$$

これを解いて、$C_1=0,\ C_2=1$ となる。以上より、与式の特解は

$$\underline{y=xe^{-5x}}$$

(7)　$y''-y'+y=0$　初期条件 $y(0)=1,\qquad y'(0)=-1$

特性方程式 $\lambda^2-\lambda+1=0$ を解くと、

$$\lambda=\frac{1\pm\sqrt{1-4\times1}}{2}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

よって、一般解は $y=e^{\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ となる。

初期条件より、

$$y(0)=C_1=1,\qquad y'(0)=\frac{1}{2}C_1+\frac{\sqrt{3}}{2}C_2=-1$$

これを解いて、$C_1=1,\ C_2=-\sqrt{3}$ となる。以上より、与式の特解は

$$\underline{y = e^{\frac{1}{2}x}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}$$

➢ オイラー型非同次微分方程式

次のオイラー型非同次微分方程式の一般解を求めよ。

物理数学教科書 P.35 演習問題［3］

（1） $\boldsymbol{x^2y'' - xy' - 3y = 0}$

オイラー型微分方程式 $x^2y'' - xy' - 3y = 0$ について、$y = x^\lambda$ とおいてできる特性方程式

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

を解くと、$\lambda = -1, 3$ となる。よって、基本解は、x^{-1}, x^3 であるから、

与式の一般解は $\underline{y = \frac{C_1}{x} + C_2x^3 \ \left(C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}\right)}$ となる。

オリジナル（レポートに出題）

（2） $\boldsymbol{x^2y'' + xy' - 4y = 0}$

オイラー型微分方程式 $x^2y'' + xy' - 4y = 0$ について、$y = x^\lambda$ とおいてできる特性方程式

$$\lambda^2 - 4 = 0$$

を解くと、$\lambda = 2, -2$ となる。よって、基本解は、x^2, x^{-2} であるから、

与式の一般解は $\underline{y = C_1x^2 + \frac{C_2}{x^2} \ \left(C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}\right)}$ となる。

（3） $\boldsymbol{x^2y'' - 2xy' + 2y = 0}$

オイラー型微分方程式 $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ について、$y = x^\lambda$ とおいてできる特性方程式

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

を解くと、$\lambda = 1, 2$ となる。よって、基本解は、x, x^2 であるから、

与式の一般解は $\underline{y = C_1x + C_2x^2 \ \left(C_1,\ C_2 \text{ は任意定数}\right)}$ となる。