 担当教員：西沢 望（S-305）：nishizawa.nozomi@kitasato-u.ac.jp

第 14 回 2 階線形微分方程式（2）

今回のポイント

0. 復習
1. 定数係数 2 階非同次線形微分方程式の特殊解
2. 定数係数 2 階非同次線形微分方程式の一般解

定数係数 2 階非同次線形微分方程式

前回、2 階非同次線形微分方程式

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \cdots (1) \quad \Rightarrow \text{一般解 } y\text{、特殊解 } y_0$$

の同伴方程式（2 階同次線形微分方程式）を

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad \cdots (2) \quad \Rightarrow \text{一般解 } Y(= C_1Y_1 + C_2Y_2)$$

としたとき、（1）の一般解は特殊解と同伴方程式の和の形、すなわち

$$y = y_0 + Y$$

となることを示した。

また、（2）のうち定数係数の同伴方程式の一般解 Y の解法についても学んだ。

すなわち、特性方程式

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad \cdots (3)$$

のから基本解 (Y_1 と Y_2) と一般解 ($Y = C_1Y_1 + C_2Y_2$) が得られることを学んだ。

今回は、（1）の特殊解 y_0 を自力で求める方法について学び、これらを統合して（1）の一般解

$$y = y_0 + Y = y_0 + C_1Y_1 + C_2Y_2$$

を求める。

非同次微分方程式の特殊解

（1）の特殊解 y_0 は同伴方程式（3）の一般解で基本解の Y_1 と Y_2 を用いて求めることができる。

通常は、$R(x)$ に似た形であると予想を立てて探す。すなわち、

(i) $R(x)$ が n 次の整式のとき → n 次の整式

(ii) $R(x)$ が ke^{rx} の形のとき → Ae^{rx}

(iii) $R(x)$ が$k\sin rx+h\cos rx$ の形のとき　→　$A\sin rx+B\cos rx$

この方法を<u>**未定係数法**</u>という。

例（教科書 P.205）

（1）　$\boldsymbol{y''-3y'+2y=2x+1}$

1 次の多項式であるので特殊解を $y_0=Ax+B$ とおき、微分方程式に代入すると、

$$0-3A+2(Ax+B)=2x+1$$

$$2Ax-3A+2B=2x+1$$

よって、　$A=1,\ B=2$ となるので、$\underline{y_0=x+2}$

（2）　$\boldsymbol{y''+2y'+y=4e^x}$

特殊解を $y_0=Ae^x$ とおき、微分方程式に代入すると、

$$Ae^x+2Ae^x+Ae^x=4e^x$$

よって、　$A=1$ となるので、$\underline{y_0=e^x}$

（3）　$\boldsymbol{y''-2y'+2y=5\sin 2x}$

特殊解を $y_0=A\sin 2x+B\cos 2x$ とおき、微分方程式に代入すると、

$$-4A\sin 2x-4B\cos 2x-2(2A\cos 2x-2B\sin 2x)+2(A\sin 2x+B\cos 2x)$$

$$=5\sin 2x$$

$$(-4A+4B+2A)\sin 2x+(-4B-4A+2B)\cos 2x=5\sin 2x$$

よって、　$A=-\frac{1}{2},\ B=1$ となるので、$\underline{y_0=-\frac{1}{2}\sin 2x+\cos 2x}$

基本解 Y_1, Y_2 から特殊解 y_0 を求める方法（広義の係数変化法）

定数係数 2 階非同次線形微分方程式

$$y'' + ay' + by = R(x) \cdots ①$$

の同伴方程式の特性方程式 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ の基本解を Y_1 と Y_2 とおくと

非同次方程式① の特殊解 y_0 は次の式で与えられる。

$$y_0 = -Y_1 \int \frac{Y_2 R(x)}{W(Y_1, Y_2)} dx + Y_2 \int \frac{Y_1 R(x)}{W(Y_1, Y_2)} dx$$

ただし、$\left(W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{vmatrix} = Y_1 Y_2' - Y_1' Y_2\right)$

［証明］

係数変化法から特殊解 y_0 が、

$$y_0 = C_1(x) Y_1 + C_2(x) Y_2 \cdots ③$$

と書けるものとする。③を x で微分して

$$\begin{aligned} y_0' &= (C_1' Y_1 + C_1 Y_1') + (C_2' Y_2 + C_2 Y_2') \\ &= \underline{C_1' Y_1 + C_2' Y_2} + C_1 Y_1' + C_2 Y_2' \end{aligned}$$

ここで、下線部を 0 とおく。すなわち、$C_1' Y_1 + C_2' Y_2 = 0 \cdots ④$。すると、

$$y_0' = C_1 Y_1' + C_2 Y_2' \cdots ⑤$$

この両辺をもう一度 x で微分すると、

$$\begin{aligned} y_0'' &= (C_1' Y_1' + C_1 Y_1'') + (C_2' Y_2' + C_2 Y_2'') \\ &= C_1 Y_1'' + C_2 Y_2'' + C_1' Y_1' + C_2' Y_2' \cdots ⑥ \end{aligned}$$

y_0 は①の特殊解であるから、③、⑤、⑥を①に代入しても成り立つ。

$$(C_1 Y_1'' + C_2 Y_2'' + C_1' Y_1' + C_2' Y_2') + a(C_1 Y_1' + C_2 Y_2') + b(C_1(x) Y_1 + C_2(x) Y_2) = R(x)$$

$$C_1 \left(\underline{Y_1'' + aY_1' + bY_1}\right) + C_2 \left(\underline{Y_2'' + aY_2' + bY_2}\right) + C_1' Y_1' + C_2' Y_2' = R(x)$$

下線部は 0 なので、$C_1' Y_1' + C_2' Y_2' = R(x) \cdots ⑦$

④ と ⑦ を併記すると

$$\begin{cases} C_1' Y_1 + C_2' Y_2 = 0 \\ C_1' Y_1' + C_2' Y_2' = R(x) \end{cases} \quad \text{よって、} \quad \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ R(x) \end{bmatrix} \cdots ⑧$$

ここで、Y_1 と Y_2 は基本解なので、このロンスキアン $W(Y_1,Y_2)$ は

$$W(Y_1,Y_2)=\begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1{}' & Y_2{}' \end{vmatrix} \neq 0$$

となる。そこで、⑧ の両辺に逆行列をかけると、

$$\begin{bmatrix} C_1{}' \\ C_2{}' \end{bmatrix} = \frac{1}{W(Y_1,Y_2)}\begin{bmatrix} Y_2{}' & -Y_2 \\ -Y_1{}' & Y_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ R(x) \end{bmatrix} = \frac{1}{W(Y_1,Y_2)}\begin{bmatrix} -Y_2R(x) \\ Y_1R(x) \end{bmatrix}$$

よって、いじょうより、

$$C_1{}' = -\frac{Y_2R(x)}{W(Y_1,Y_2)},\quad C_2{}' = \frac{Y_1R(x)}{W(Y_1,Y_2)}$$

よって、

$$C_1 = -\int \frac{Y_2R(x)}{W(Y_1,Y_2)}dx,\quad C_2 = \int \frac{Y_1R(x)}{W(Y_1,Y_2)}dx$$

ゆえに、これらを③ に代入して、

$$y_0 = -Y_1\int \frac{Y_2R(x)}{W(Y_1,Y_2)}dx + Y_2\int \frac{Y_1R(x)}{W(Y_1,Y_2)}dx$$

となる。この手法を**係数変化法**という。

$\boxed{\text{例}}$

微分方程式 $y'' - y' - 2y = e^x$ の特殊解を求めよ。

与式の同伴方程式 $y'' - y' - 2y = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ を解くと

$$(\lambda-2)(\lambda+1)=0$$
$$\lambda = 2, -1$$

であるから、この基本解は、$Y_1 = e^{2x}, Y_2 = e^{-x}$ となる。このとき、ロンスキアンは、

$$W(Y_1,Y_2)=\begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1{}' & Y_2{}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-x} \\ 2e^{2x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^x - 2e^x = -3e^x$$

よって、公式　$y_0 = -Y_1\int \frac{Y_2R(x)}{W(Y_1,Y_2)}dx + Y_2\int \frac{Y_1R(x)}{W(Y_1,Y_2)}dx$　に代入すると、

$$y_0 = -e^{2x}\int \frac{e^{-x}e^x}{-3e^x}dx + e^{-x}\int \frac{e^{2x}e^x}{-3e^x}dx$$

$$= \frac{1}{3}e^{2x}\int e^{-x}\,dx - \frac{1}{3}e^{-x}\int e^{2x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}e^{x} - \frac{1}{6}e^{x} = -\frac{1}{2}e^{x}$$

$$\therefore\ \underline{y_0 = -\frac{1}{2}e^{x}}$$

➢ 定数係数 2 階非同次線形微分方程式の一般解

同伴方程式の特性方程式から基本解が求められ、特殊解が公式によって求められたので、定数係数 2 階非同次微分方程式の解が求められた。

例

微分方程式 $y'' - y' - 2y = e^x$ の一般解を求めよ。

前問までで、基本解が $Y_1 = e^{2x}, Y_2 = e^{-x}$ 、特殊解が$y_0 = -\frac{1}{2}e^x$ と求められたので、一般解は

$$y = y_0 + C_1Y_1 + C_2Y_2 = \underline{-\frac{1}{2}e^x + C_1e^{2x} + C_2e^{-x}}$$

となる。

では、何問かやってみましょう。

例題

(1)　$y'' + 4y = \cos x$
(2)　$y'' - 4y' + 4y = 6xe^{2x}$
(3)　$y'' - 2y' + y = e^x \cos x$

(1)　$y'' + 4y = \cos x$ の同伴方程式 $y'' + 4y = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 + 4 = 0$ を解くと

$$\lambda = \pm 2i$$

であるから、この基本解は、$Y_1 = \cos 2x\,, Y_2 = \sin 2x$ となる。このとき、ロンスキアンは、

$$W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x = 2 \neq 0$$

となるので、特殊解は、

$$y_0 = -\cos 2x \int \frac{\sin 2x \cos x}{2}dx + \sin 2x \int \frac{\cos 2x \cos x}{2}dx$$

$$= -\frac{\cos 2x}{2}\int \sin 2x \cos x \, dx + \frac{\sin 2x}{2}\int \cos 2x \cos x \, dx$$

$$= -\frac{\cos 2x}{2}\int \frac{\sin 3x + \sin x}{2} dx + \frac{\sin 2x}{2}\int \frac{\cos 3x + \cos x}{2} dx$$

$$= -\frac{\cos 2x}{4}\left[-\frac{\cos 3x}{3} - \cos x\right] + \frac{\sin 2x}{2}\left[\frac{\sin 3x}{3} + \sin x\right]$$

$$= \frac{1}{12}(\cos 2x \cos 3x + \sin 2x \sin 3x) + \frac{1}{4}(\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x)$$

$$= \frac{1}{12}\cos x + \frac{1}{4}\cos x = \frac{1}{3}\cos x$$

以上より、与式の一般解は

$$y = \underline{\frac{1}{3}\cos x + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x}$$

(2) $y'' - 4y' + 4y = 6xe^{2x}$ の同伴方程式 $y'' - 4y' + 4y = 0$ の

特性方程式 $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ を解くと

$$\lambda = 2 \ \left(\text{重解}\right)$$

であるから、この基本解は、$Y_1 = e^{2x}, Y_2 = xe^{2x}$ となる。このとき、ロンスキアンは、

$$W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1{}' & Y_2{}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & (1+2x)e^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x}(2x + 1 - 2x) = e^{4x} \neq 0$$

となるので、特殊解は、

$$y_0 = -e^{2x}\int \frac{xe^{2x} \cdot 6xe^{2x}}{e^{4x}} dx + xe^{2x}\int \frac{e^{2x} \cdot 6xe^{2x}}{e^{4x}} dx$$

$$= -6e^{2x}\int x^2 \, dx + 6xe^{2x}\int x \, dx$$

$$= -6e^{2x}\left(\frac{x^3}{3}\right) + 6xe^{2x}\left(\frac{x^2}{2}\right) = -2x^3e^{2x} + 3x^3e^{2x}$$

$$= x^3e^{2x}$$

以上より、与式の一般解は

$$y = \underline{x^3e^{2x} + (C_1 + C_2x)e^{2x}}$$

(3) $y'' - 2y' + y = e^x \cos x$ の同伴方程式 $y'' - 2y' + y = 0$ の

特性方程式 $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ を解くと

$$\lambda = 1 \ \left(\text{重解}\right)$$

であるから、この基本解は、$Y_1=e^x, Y_2=xe^x$ となる。このとき、ロンスキアンは、

$$W(Y_1,Y_2)=\begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1{}' & Y_2{}' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (1+x)e^x \end{vmatrix}=e^{2x}(x+1-x)=e^{2x}\neq 0$$

となるので、特殊解は、

$$y_0=-e^x\int\frac{xe^x\cdot e^x\cos x}{e^{2x}}dx+xe^x\int\frac{e^x\cdot e^x\cos x}{e^{2x}}dx$$

$$=-e^x\int x\cos x\,dx+xe^x\int\cos x\,dx$$

$$=-e^x\left(x\sin x-\int\sin x\,dx\right)+xe^x(\sin x)$$

$$=-e^x(x\sin x+\cos x)+xe^x(\sin x)$$

$$=-e^x\cos x$$

以上より、与式の一般解は

$$y=\underline{-e^x\cos x+(C_1+C_2x)e^x}$$

➢ （参考）1 つの特殊解から一般解を求める方法（公式ではなく解法）

基本解 Y_1 から一般解 y_0 を求める方法

$$y''+ay'+by=R(x)\cdots①$$

について、① の同伴方程式

$$y''+ay'+by=0\quad\cdots②$$

の 1 つの基本解を Y_1とおく。

このとき、非同次方程式 ① の一般解 を

$$y=u(x)Y_1\cdots③$$

とおく。③ を順に 2 階微分して、

$$y'=u(x)'Y_1+u(x)Y_1{}'\cdots④$$

$$y''=u(x)''Y_1+2u(x)'Y_1{}'+u(x)Y_1{}''\cdots⑤$$

これらを① に代入すると

$$u(x)''Y_1+2u(x)'Y_1{}'+u(x)Y_1{}''+a(u(x)'Y_1+u(x)Y_1{}')+bu(x)Y_1=R(x)$$

$$u(x)(Y_1{}''+aY_1{}'+bY_1)+Y_1u(x)''+(2Y_1{}'+aY_1)u(x)'=R(x)$$

ここで、Y_1 は②の解なので、$Y_1{}''+aY_1{}'+bY_1=0$

$$Y_1u(x)''+(2Y_1{}'+aY_1)u(x)'=R(x)$$

$Y_1\neq 0$ として両辺を Y_1 で割り、$u(x)'=p(x)$，とおくと、$u(x)''=p(x)'$

$$p(x)'+\left(2\frac{Y_1{}'}{Y_1}+a\right)p(x)=\frac{R(x)}{Y_1}$$

ここで、さらに

$$P_0(x) = 2\frac{Y_1{}'}{Y_1} + a,\ \ Q_0(x) = \frac{R(x)}{Y_1}$$

とおくと、

$$p(x)' + P_0(x)p(x) = Q_0(x)$$

となるので、これは1階の線形微分方程式となる。

よって、解の公式より、

$$p(x) = \frac{du}{dx} = e^{-\int P_0(x)dx}\left\{\int Q_0(x)e^{\int P_0(x)dx}\,dx + C\right\}$$

となるので、これを x で積分して $u(x) = \frac{y}{Y_1}$ から一般解 y を導くことができる。

例題

微分方程式 $\boldsymbol{y'' - y' - 2y = e^x}$ の基本解の1つが$\boldsymbol{e^{2x}}$であるとわかっているとき一般解を求めよ。

$$y'' - y' - 2y = e^x \cdots ①$$

の同伴方程式

$$y'' - y' - 2y = 0 \cdots ②$$

で、①の基本階の一つが e^{2x} であるとき、一般解 を

$$y = u(x)e^{2x} \cdots ③$$

とおく。③ を順に2階微分して、

$$y' = u(x)'e^{2x} + 2u(x)e^{2x} \cdots ④$$

$$y'' = u(x)''e^{2x} + 4u(x)'e^{2x} + 4u(x)e^{2x} \cdots ⑤$$

これらを① に代入すると

$$u(x)''e^{2x} + 4u(x)'e^{2x} + 4u(x)e^{2x} - (u(x)'e^{2x} + 2u(x)e^{2x}) - 2u(x)e^{2x} = e^x$$

$$u(x)(4e^{2x} - 2e^{2x} - 2e^{2x}) + e^{2x}u(x)'' + (4e^{2x} - e^{2x})u(x)' = e^x$$

$$e^{2x}u(x)'' + 3e^{2x}u(x)' = e^x$$

$$u(x)'' + 3u(x)' = e^{-x}$$

ここで、$u(x)' = p(x)$, とおくと、$u(x)'' = p(x)'$

$$p(x)' + 3p(x) = e^{-x}$$

これは1階の線形微分方程式となる。

よって、解の公式より、

$$p(x) = \frac{du}{dx} = e^{-\int 3dx}\left\{\int e^{-x}e^{\int 3dx}\,dx + C_1\right\}$$

$$= e^{-3x}\left\{\int e^{2x}\,dx + C_1\right\} = e^{-3x}\left\{\frac{1}{2}e^{2x} + C_1\right\}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-x} + C_1 e^{-3x}$$

$$\therefore u = \frac{1}{2}\int e^{-x}\,dx + C_1\int e^{-3x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{3}C_1 e^{-3x} + C_2 = -\frac{1}{2}e^{-x} - C_3 e^{-3x} + C_2$$

以上より、

$$y = u(x)e^{2x} = e^{2x}\left\{-\frac{1}{2}e^{-x} - C_3 e^{-3x} + C_2\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}e^{x} - C_3 e^{-x} + C_2 e^{2x}$$

よって、同じ一般解が得られた。

➢ （参考）定数係数でない一般の 2 階非同次線形微分方程式の解法について

前項までで、基本解が 2 つ分かる場合、もしくは少なくとも 1 つ分かる場合には一般解が求められることがわかった。この解法は係数が定数でない一般の微分方程式にも当てはまる。

一般の 2 階非同次線形微分方程式の解法

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \cdots ①$$

と、① の同伴方程式

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad \cdots ②$$

について、

(1) 同伴方程式 ② の基本解 Y_1, Y_2 がわかっている場合、① の特殊解 y_0 は

$$y_0 = -Y_1\int \frac{Y_2 R(x)}{W(Y_1, Y_2)}dx + Y_2\int \frac{Y_1 R(x)}{W(Y_1, Y_2)}dx$$

で与えられる。よって、① の一般解は、

$$y = y_0 + C_1 Y_1 + C_2 Y_2$$

(2) 同伴方程式 ② の基本解の 1 つ $Y_1\ (\neq 0)$ がわかっている場合、

非同次方程式 ① の一般解 を

$$y = u(x)Y_1$$

とおくと、

$$y' = u(x)'Y_1 + u(x)Y_1{}'$$
$$y'' = u(x)''Y_1 + 2u(x)'Y_1{}' + u(x)Y_1{}''$$

である。これらを①に代入すると

$$u(x)''Y_1 + 2u(x)'Y_1' + u(x)Y_1'' + P(x)(u(x)'Y_1 + u(x)Y_1') + Q(x)u(x)Y_1 = R(x)$$

$$u(x)(Y_1'' + P(x)Y_1' + Q(x)Y_1) + Y_1u(x)'' + (2Y_1' + P(x)Y_1)u(x)' = R(x)$$

ここで、Y_1 は②の解なので、$Y_1'' + P(x)Y_1' + Q(x)Y_1 = 0$

$$Y_1u(x)'' + (2Y_1' + P(x)Y_1)u(x)' = R(x)$$

$Y_1 \neq 0$ として両辺を Y_1 で割り、$u(x)' = p(x)$, とおくと、$u(x)'' = p(x)'$

$$p(x)' + \left(2\frac{Y_1'}{Y_1} + P(x)\right)p(x) = \frac{R(x)}{Y_1}$$

となるので、これは 1 階の線形微分方程式となり、求めることができる。

以上より、基本階の 1 つ $Y_1\ (\neq 0)$ が求まれば求めることができる。

問題文に与えられている場合や物理的に明らかな場合などもあるが、与えられていなければ、x^n や $e^{\pm nx}$, $e^{\pm inx}$などとなることが多いのでそれらの中から同伴方程式を満たすものを探す。

【問題集】

非同次微分方程式の特殊解

次の微分方程式の特殊解をロンスキアンから求めよ。また、一般解も求めよ。

（1）$y'' - 3y' + 2y = 2x + 1$

（2）$y'' + 2y' + y = 4e^x$

（3）$y'' - 2y' + 2y = 5\sin 2x$

次の微分方程式の特殊解を未定係数法により求めよ。

（4）$y'' + 3y' + 2y = x^2$

（5）$y'' + 6y' + 9y = 5e^{2x}$

（6）$y'' - y' + 2y = -2\cos x$

次の微分方程式の特殊解を()内の形で求めよ。また、一般解も求めよ。

（7）$y'' - y' = -2x \qquad (Ax^2 + Bx)$

（8）$y'' - y' - 2y = e^{2x} \qquad (Axe^{2x})$

（9）$y'' - 2y' + y = e^x \qquad (Ax^2e^x)$

定数係数 2 階非同次線形微分方程式

次の微分方程式の一般解を求めよ。

（1）$y'' - 3y' + 2y = x^2$

（2）$y'' - 6y' + 8y = x^2$

（3）$y'' + y = xe^x$

（4）$y'' - 2y' + y = \sin x$

（5）$y'' + y = 2e^x$

（6）$y'' - 4y' + 3y = e^{-x}$

（7）$y'' + 4y = x$

（8）$y'' - 5y' + 6y = e^{-x}$

担当教員：西沢 望（S-305）：nishizawa.nozomi@kitasato-u.ac.jp

（9） $y'' - 3y' + 2y = \cos x$

（10） $y'' + 3y' + 2y = xe^x$

（11） $y'' - 3y' + 2y = 4x^2$

（12） $y'' + y = \tan x$

（13） $y'' - 2y' + y = e^x \log x$

（14） $y'' - 5y' + 6y = -xe^{3x}$

（15） $y'' + y = \sin x + \sin 2x$

（16） $y'' + 8y' + 16y = 4e^{-2x}$

（17） $y'' + y' - 2y = x^2$

（18） $y'' - 4y' + 4y = e^{3x}$

（19） $y'' + y' - 6y = \sin x$

（20） $y'' + y' = 2x + 1$

（21） $y'' + 2y' + y = e^{-x}$

（22） $y'' + y = \sin x + \cos x$

次の微分方程式の一般解 y を、その同伴方程式の基本解の 1 つ Y_1 に対して $y = u(x)Y_1$ とおくことで求めよ。

（1） $y'' - 3y' + 2y = 4x^2$

（2） $y'' + y = \tan x$

（3） $y'' - 2y' + y = e^x \log x$

（4） $y'' - 5y' + 6y = -xe^{3x}$

（5） $y'' + 8y' + 16y = 4e^{-2x}$

➢ 一般の 2 階非同次線形微分方程式

次の一般の 2 階非同次線形微分方程式の一般解を求めよ。

（1）$y'' - \dfrac{x+2}{x}y' + \dfrac{2}{x}y = x^2e^x$　ただし、基本解の1つを $Y_1 = e^x$ とせよ

（2）$y'' - \dfrac{x+1}{x}y' + \dfrac{1}{x}y = xe^x$　ただし、基本解の1つを $Y_1 = e^x$ とせよ

（3）$y'' - \dfrac{2}{x^2}y = 9$　ただし、基本解の1つを $Y_1 = x^2$ とせよ

（4）$y'' - \dfrac{3x^2}{x^3+1}y' + \dfrac{3x}{x^3+1}y = 2(x^3+1)$　ただし、基本解の1つを $Y_1 = x$ とせよ

➢ 物理数学としての問題

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$\ddot{y} + {\omega_0}^2 y = F\cos\omega t$$

(これは固有角周波数 ω_0 の振動子に外力 F を加えた時の振動子の振る舞いを示す)

(2) 体重計やアナログ式電圧計などの測定計器では、針の振れの大きさで測定値が得られる。この針は質量 m で、ばね定数 k のバネにつながれているとみなすことができる。このときの運動方程式は、

$$m\ddot{x} = -kx$$

と表され固有振動数 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ で振動し続ける。そこに振れの速さに比例した摩擦力がはたらくと

$$m\ddot{x} = -kx - \Gamma\dot{x}\quad(\Gamma > 0)$$

となる。この計器に一定の負荷（体重や電圧など）E_0 をかけたとすると、針にとってこれは外力とみなされる。よって、

$$m\ddot{x} = -kx - \Gamma\dot{x} + E_0$$

あるいは、$\Gamma = 2m\gamma,\ E_0 = me_0$ とおいて、

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + {\omega_0}^2 x = e_0$$

簡単のため、$\omega_0 = e_0 = 1$ として、

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + x = 1$$

を初期条件 $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ (針ははじめ 0 の位置からゆっくり動き始める)で求めよ。
$\gamma\ (> 0)$の値によって場合に分けて調べ、針の動き x の変化を図示せよ。

【解答】

➢ 非同次微分方程式の特殊解

次の微分方程式の特殊解を求めよ。

微分積分教科書 P.205 例 8、P.206 例題 4

(1)　$y''-3y'+2y=2x+1$

与式の同伴方程式 $y''-3y'+2y=0$ の特性方程式 $\lambda^2-3\lambda+2=0$ を解くと

$$(\lambda-2)(\lambda-1)=0$$
$$\lambda=2,\ \ 1$$

であるから、この基本解は、$Y_1=e^{2x}, Y_2=e^x$ となる。このとき、ロンスキアンは、

$$W(Y_1,Y_2)=\begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1{}' & Y_2{}' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^{2x} & e^x \\ 2e^{2x} & e^x \end{vmatrix}=e^{3x}-2e^{3x}=-e^{3x}$$

よって、公式　$y_0=-Y_1\int\frac{Y_2R(x)}{W(Y_1,Y_2)}dx+Y_2\int\frac{Y_1R(x)}{W(Y_1,Y_2)}dx$　に代入すると、

$$\begin{aligned}
y_0&=-e^{2x}\int\frac{e^x(2x+1)}{-e^{3x}}dx+e^x\int\frac{e^{2x}(2x+1)}{-e^{3x}}dx\\
&=e^{2x}\int e^{-2x}(2x+1)\,dx-e^x\int e^{-x}(2x+1)\,dx\\
&=e^{2x}\left(\frac{e^{-2x}}{-2}(2x+1)-\int\frac{e^{-2x}}{-2}\cdot(2)dx\right)-e^x\left(\frac{e^{-x}}{-1}(2x+1)-\int\frac{e^{-x}}{-1}\cdot(2)dx\right)\\
&=e^{2x}(-xe^{-2x}-e^{-2x})-e^x(-2xe^{-x}-3e^{-x})\\
&=(-x-1)-(-2x-3)
\end{aligned}$$

$$\therefore\ \underline{y_0=x+2}$$

以上より、与式の一般解は

$$y=\underline{x+2+C_1e^{2x}+C_2e^x}$$

(2)　$y''+2y'+y=4e^x$

与式の同伴方程式 $y''+2y'+y=0$ の特性方程式 $\lambda^2+2\lambda+1=0$ を解くと

$$(\lambda+1)^2=0$$
$$\lambda=-1$$

であるから、この基本解は、$Y_1 = e^{-x}, Y_2 = xe^{-x}$ となる。このとき、ロンスキアンは、

$$W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1{}' & Y_2{}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x} - xe^{-x} \end{vmatrix} = e^{-2x} - xe^{-2x} + xe^{-2x} = e^{-2x}$$

よって、公式　$y_0 = -Y_1 \int \frac{Y_2 R(x)}{W(Y_1, Y_2)} dx + Y_2 \int \frac{Y_1 R(x)}{W(Y_1, Y_2)} dx$　に代入すると、

$$\begin{aligned} y_0 &= -e^{-x} \int \frac{xe^{-x} \cdot 4e^x}{e^{-2x}} dx + xe^{-x} \int \frac{e^{-x} \cdot 4e^x}{e^{-2x}} dx \\ &= -4e^{-x} \int xe^{2x}\, dx + 4xe^{-x} \int e^{2x}\, dx \\ &= -4e^{-x} \left(\frac{2xe^{2x} - e^{2x}}{4} \right) + 4xe^{-x} \left(\frac{e^{2x}}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\therefore \underline{y_0 = e^x}$$

以上より、与式の一般解は

$$y = \underline{e^x + (C_1 + C_2 x)e^{-x}}$$

(3)　$y'' - 2y' + 2y = 5\sin 2x$

与式の同伴方程式 $y'' - y' - 2y = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ を解くと

$$\lambda = 1 \pm i$$

であるから、この基本解は、$Y_1 = e^x \cos x, Y_2 = e^x \sin x$ となる。このとき、ロンスキアンは、

$$W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1{}' & Y_2{}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x \cos x & e^x \sin x \\ e^x(\cos x - \sin x) & e^x(\cos x + \sin x) \end{vmatrix} = e^{2x}$$

よって、公式　$y_0 = -Y_1 \int \frac{Y_2 R(x)}{W(Y_1, Y_2)} dx + Y_2 \int \frac{Y_1 R(x)}{W(Y_1, Y_2)} dx$　に代入すると、

$$\begin{aligned} y_0 &= -e^x \cos x \int \frac{e^x \sin x \cdot (5 \sin 2x)}{e^{2x}} dx + e^x \sin x \int \frac{e^x \cos x \cdot (5 \sin 2x)}{e^{2x}} dx \\ &= -5e^x \cos x \int e^{-x} \sin x \cdot \sin 2x\, dx + 5e^x \sin x \int e^{-x} \cos x \cdot \sin 2x\, dx \\ &= \frac{5}{2} e^x \cos x \int e^{-x}\{\cos 3x - \cos x\}\, dx + \frac{5}{2} e^x \sin x \int e^{-x}\{\sin 3x + \sin x\}\, dx \end{aligned}$$

$$=\frac{5}{2}e^x\cos x\left\{\frac{1}{10}e^{-x}\{-\cos 3x+3\sin 3x\}-\frac{1}{2}e^{-x}\{-\cos x+\sin x\}\right\}$$
$$+\frac{5}{2}e^x\sin x\left\{\frac{1}{10}e^{-x}\{-\sin 3x-3\cos 3x\}+\frac{1}{2}e^{-x}\{-\cos x-\sin x\}\right\}$$
$$=\frac{5}{2}\cos x\left\{\frac{1}{10}\{-\cos 3x+3\sin 3x\}-\frac{1}{2}\{-\cos x+\sin x\}\right\}$$
$$-\frac{5}{2}\sin x\left\{\frac{1}{10}\{3\cos 3x+\sin 3x\}+\frac{1}{2}\{\cos x+\sin x\}\right\}$$
$$=-\frac{1}{4}\cos x\cos 3x+\frac{3}{4}\cos x\sin 3x+\frac{5}{4}\cos^2 x-\frac{5}{4}\cos x\sin x$$
$$-\frac{3}{4}\sin x\cos 3x-\frac{1}{4}\sin x\sin 3x-\frac{5}{4}\cos x\sin x-\frac{5}{4}\sin^2 x$$
$$=-\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{3}{4}\sin 2x+\frac{5}{4}\cos 2x-\frac{5}{4}\sin 2x$$
$$\therefore\ \underline{y_0=-\frac{1}{2}\sin 2x+\cos 2x}$$

以上より、与式の一般解は

$$y=\underline{-\frac{1}{2}\sin 2x+\cos 2x+C_1e^x\cos x+C_2e^x\sin x}$$

次の微分方程式の特殊解を未定係数法により求めよ。

微分積分教科書 P.205 問 6

(4)　$y''+3y'+2y=x^2$

2 次の多項式であるので特殊解を $y_0=Ax^2+Bx+C$ とおき、微分方程式に代入すると、

$$2A+3(2Ax+B)+2(Ax^2+Bx+C)=x^2$$
$$2Ax^2+(6A+2B)x+(2A+3B+2C)=x^2$$

よって、 $A=\frac{1}{2},\ B=-\frac{3}{2},\ C=\frac{7}{4}$ となるので、$\underline{y_0=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}}$

【別解】また、ロンスキアンによる公式でも求めることができる。

与式の同伴方程式 $y''+3y'+2y=0$ の特性方程式 $\lambda^2+3\lambda+2=0$ を解くと

$$(\lambda+2)(\lambda+1)=0$$
$$\lambda=-2,-1$$

であるから、この基本解は、$Y_1 = e^{-2x}, Y_2 = e^{-x}$ となる。このとき、ロンスキアンは、

$$W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{-x} \\ -2e^{-2x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^{-3x} + 2e^{-3x} = e^{-3x}$$

よって、公式　$y_0 = -Y_1 \int \frac{Y_2 R(x)}{W(Y_1,Y_2)} dx + Y_2 \int \frac{Y_1 R(x)}{W(Y_1,Y_2)} dx$　に代入すると、

$$y_0 = -e^{-2x} \int \frac{e^{-x}x^2}{e^{-3x}} dx + e^{-x} \int \frac{e^{-2x}x^2}{e^{-3x}} dx$$

$$= -e^{-2x} \int x^2 e^{2x}\, dx + e^{-x} \int x^2 e^x\, dx$$

$$= -e^{-2x} \left\{ \frac{e^{2x}}{2} \left(x^2 - x + \frac{1}{2} \right) \right\} + e^{-x} \{ e^x (x^2 - 2x + 2) \}$$

$$\therefore \underline{y_0 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}}$$

（5）　$y'' + 6y' + 9y = 5e^{2x}$　（演習に出題）

特殊解を $y_0 = Ae^{2x}$ とおき、微分方程式に代入すると、

$$4Ae^{2x} + 12Ae^{2x} + 9Ae^{2x} = 5e^{2x}$$

よって、 $A = \frac{1}{5}$ となるので、$\underline{y_0 = \frac{1}{5}e^{2x}}$

【別解】与式の同伴方程式 $y'' + 6y' + 9y = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ を解くと

$$(\lambda + 3)^2 = 0$$

$$\lambda = -3$$

であるから、この基本解は、$Y_1 = e^{-3x}, Y_2 = xe^{-3x}$ となる。このとき、ロンスキアンは、

$$W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-3x} & xe^{-3x} \\ -3e^{-3x} & e^{-3x} - 3xe^{-3x} \end{vmatrix} = e^{-6x}(1 - 3x + 3x) = e^{-6x}$$

よって、公式　$y_0 = -Y_1 \int \frac{Y_2 R(x)}{W(Y_1,Y_2)} dx + Y_2 \int \frac{Y_1 R(x)}{W(Y_1,Y_2)} dx$　に代入すると、

$$y_0 = -e^{-3x} \int \frac{xe^{-3x} \cdot 5e^{2x}}{e^{-6x}} dx + xe^{-3x} \int \frac{e^{-3x} \cdot 5e^{2x}}{e^{-6x}} dx$$

$$= -5e^{-3x} \int xe^{5x}\, dx + 5xe^{-3x} \int e^{5x}\, dx$$

$$= -5e^{-3x}\left\{\frac{e^{5x}}{5}\left(x-\frac{1}{5}\right)\right\} + 5xe^{-3x}\frac{e^{5x}}{5}$$

$$= -e^{2x}\left(x-\frac{1}{5}\right) + xe^{2x}$$

$$\therefore \underline{y_0 = \frac{1}{5}e^{2x}}$$

(6)　$y'' - y' + 2y = -2\cos x$

特殊解を $y_0 = A\sin x + B\cos x$ とおき、微分方程式に代入すると、

$$-A\sin x - B\cos x - (A\cos x - B\sin x) + 2(A\sin x + B\cos x) = -2\cos x$$

$$(-A + B + 2A)\sin x + (-B - A + 2A)\cos x = -2\cos x$$

よって、 $A = 1,\ B = -1$ となるので、$\underline{y_0 = \sin x - \cos x}$

次の微分方程式の特殊解を()内の形で求めよ。

微分積分教科書 P.205 問 7

(7)　$y'' - y' = -2x$　　$(Ax^2 + Bx)$

特殊解を $y_0 = Ax^2 + Bx$ とおき、微分方程式に代入すると、

$$2A - (2Ax + B) = -2x$$

よって、 $A = 1,\ B = 2$ となるので、$\underline{y_0 = x^2 + 2x}$

与式の同伴方程式 $y'' - y' = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 - \lambda = 0$ を解くと

$$\lambda = 0,\ \ 1$$

であるから、この基本解は、$Y_1 = 1, Y_2 = e^x$ となる。

以上より、与式の一般解は

$$y = \underline{x^2 + 2x + C_1e^x + C_2}$$

(8)　$y'' - y' - 2y = e^{2x}$　　(Axe^{2x})

特殊解を $y_0 = Axe^{2x}$ とおき、微分方程式に代入すると、

$$A(4 + 4x)e^{2x} - A(1 + 2x)e^{2x} - 2Axe^{2x} = e^{2x}$$

よって、 $A = \frac{1}{3}$ となるので、$\underline{y_0 = \frac{1}{3}xe^{2x}}$

（9）　$\boldsymbol{y'' - 2y' + y = e^x}$　　$\left(\boldsymbol{Ax^2e^x}\right)$

特殊解を $y_0 = Ax^2e^x$ とおき、微分方程式に代入すると、

$$A(x^2+4x+2)e^x - 2A(x^2+2x)e^x + Ax^2e^x = e^x$$

よって、 $A = \frac{1}{2}$ となるので、$\underline{y_0 = \frac{1}{2}x^2e^x}$

➢ 定数係数 2 階非同次線形微分方程式

次の微分方程式の一般解を求めよ。

物理数学教科書 P.28 問題 4

（1）　$\boldsymbol{y'' - 3y' + 2y = x^2}$

$y'' - 3y' + 2y = x^2$ の同伴方程式 $y'' - 3y' + 2y = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ を解くと

$$(\lambda-2)(\lambda-1) = 0$$
$$\lambda = 2, 1$$

であるから、この基本解は、$Y_1 = e^{2x}, Y_2 = e^x$ となる。このとき、ロンスキアンは、

$$W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1{}' & Y_2{}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^x \\ 2e^{2x} & e^x \end{vmatrix} = e^{3x} - 2e^{3x} = -e^{3x} \neq 0$$

2 次の多項式であるので特殊解を $y_0 = Ax^2 + Bx + C$ とおき、微分方程式に代入すると、

$$2A - 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2$$
$$2Ax^2 + (-6A + 2B)x + (2A - 3B + 2C) = x^2$$

よって、　$A = \frac{1}{2},\ B = \frac{3}{2},\ C = \frac{7}{4}$ となるので、$y_0 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$

以上より、与式の一般解は

$$\underline{y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{2} + C_1e^{2x} + C_2e^x}$$

物理数学教科書 P.30 問題 5 より

（2）　$\boldsymbol{y'' - 6y' + 8y = x^2}$

$y'' - 6y' + 8y = x^2$ の同伴方程式 $y'' - 6y' + 8y = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ を解くと

$$(\lambda-4)(\lambda-2) = 0$$

$$\lambda = 2, 4$$

であるから、この基本解は、$Y_1 = e^{2x}, Y_2 = e^{4x}$ となる。このとき、ロンスキアンは、

$$W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1{}' & Y_2{}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{4x} \\ 2e^{2x} & 4e^{4x} \end{vmatrix} = 4e^{6x} - 2e^{6x} = 2e^{6x} \neq 0$$

2 次の多項式であるので特殊解を $y_0 = Ax^2 + Bx + C$ とおき、微分方程式に代入すると、

$$2A - 6(2Ax + B) + 8(Ax^2 + Bx + C) = x^2$$
$$8Ax^2 + (-12A + 8B)x + (2A - 6B + 8C) = x^2$$

よって、　$A = \frac{1}{8},\ B = \frac{3}{16},\ C = \frac{7}{64}$ となるので、$y_0 = \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{16}x + \frac{7}{64}$

以上より、与式の一般解は

$$y = \underline{\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{16}x + \frac{7}{64} + C_1e^{2x} + C_2e^{4x}}$$

(3)　$y'' + y = xe^x$

$y'' + y = x^2$ の同伴方程式 $y'' + y = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 + 1 = 0$ を解くと

$$\lambda = \pm i$$

であるから、この基本解は、$Y_1 = \cos x, Y_2 = \sin x$ となる。このとき、ロンスキアンは、

$$W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1{}' & Y_2{}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

特殊解を $y_0 = Axe^x + Be^x$ とおき、微分方程式に代入すると、

$$(x + 2)Ae^x + Be^x + Axe^x + Be^x = xe^x$$
$$2Axe^x + (2A + 2B)e^x = xe^x$$

よって、　$A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2}$ となるので、$y_0 = \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{2}e^x$

以上より、与式の一般解は

$$y = \underline{\frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{2}e^x + C_1\cos x + C_2\sin x}$$

(4)　$y'' - 2y' + y = \sin x$

$y'' - 2y' + y = x^2$ の同伴方程式 $y'' - 2y' + y = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ を解くと

$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

$$\lambda = 1 \quad \left(\text{重解}\right)$$

であるから、この基本解は、$Y_1 = e^x, Y_2 = xe^x$ となる。このとき、ロンスキアンは、

$$W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (1+x)e^x \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0$$

特殊解を$y_0 = A\cos x + B\sin x$ とおき、微分方程式に代入すると、

$$(-A\cos x - B\sin x) - 2(-A\sin x + B\cos x) + (A\cos x + B\sin x) = \sin x$$

$$(-B + 2A + B)\sin x + (-A - 2B + A)\cos x = \sin x$$

$$2A\sin x - 2B\cos x = \sin x$$

よって、　$A = \frac{1}{2},\ B = 0$ となるので、$y_0 = \frac{1}{2}\cos x$

以上より、与式の一般解は

$$y = \underline{\frac{1}{2}\cos x + C_1 e^x + C_2 xe^x}$$

物理数学教科書 P.33 例題 2.6

（5）　$y'' + y = 2e^x$

$y'' + y = 2e^x$ の同伴方程式 $y'' + y = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 + 1 = 0$ を解くと

$$\lambda = \pm i$$

であるから、この基本解は、$Y_1 = \cos x, Y_2 = \sin x$ となる。このとき、ロンスキアンは、

$$W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

特殊解を$y_0 = Ae^x$ とおき、微分方程式に代入すると、

$$Ae^x + Ae^x = 2e^x$$

よって、　$A = 1$ となるので、$y_0 = e^x$

以上より、与式の一般解は

$$y = \underline{e^x + C_1\cos x + C_2\sin x}$$

物理数学教科書 P.34 問題 6

（6）　$y'' - 4y' + 3y = e^{-x}$

$y'' - 4y' + 3y = e^{-x}$ の同伴方程式 $y'' - 4y' + 3y = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ を解くと

$$(\lambda-3)(\lambda-1)=0$$
$$\lambda=1,3$$

であるから、この基本解は、$Y_1=e^x, Y_2=e^{3x}$ となる。このとき、ロンスキアンは、

$$W(Y_1,Y_2)=\begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1{}' & Y_2{}' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^x & e^{3x} \\ e^x & 3e^{3x} \end{vmatrix}=3e^{4x}-e^{4x}=2e^{4x}\neq 0$$

特殊解を$y_0=Ae^{-x}$ とおき、微分方程式に代入すると、

$$Ae^{-x}+4Ae^{-x}+3Ae^{-x}=e^{-x}$$

よって、　　$A=\frac{1}{8}$となるので、$y_0=\frac{1}{8}e^{-x}$

以上より、与式の一般解は

$$\underline{y=\frac{1}{8}e^{-x}+C_1e^x+C_2e^{3x}}$$

$\boxed{\textbf{物理数学教科書 P.35 演習問題[4]（レポートに出題）}}$

（7）$y''+4y=x$

$y''+4y=x$ の同伴方程式 $y''+4y=0$ の特性方程式 $\lambda^2+4=0$ を解くと

$$\lambda=2i$$

であるから、この基本解は、$Y_1=\cos 2x, Y_2=\sin 2x$ となる。このとき、ロンスキアンは、

$$W(Y_1,Y_2)=\begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1{}' & Y_2{}' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix}=2\neq 0$$

1 次の多項式であるので特殊解を $y_0=Ax+B$ とおき、微分方程式に代入すると、

$$4Ax+4B=x$$

よって、　　$A=\frac{1}{4},\ B=0$ となるので、$y_0=\frac{1}{4}x$

以上より、与式の一般解は

$$\underline{y=\frac{1}{4}x+C_1\cos 2x+C_2\sin 2x}$$

（8）$y''-5y'+6y=e^{-x}$

$y''-5y'+6y=e^{-x}$ の同伴方程式 $y''-5y'+6y=0$ の特性方程式 $\lambda^2-5\lambda+6=0$ を解くと

$$(\lambda-3)(\lambda-2)=0$$

$$\lambda = 2, 3$$

であるから、この基本解は、$Y_1 = e^{2x}, Y_2 = e^{3x}$ となる。このとき、ロンスキアンは、

$$W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = 3e^{5x} - 2e^{5x} = e^{5x} \neq 0$$

特殊解を$y_0 = Ae^{-x}$ とおき、微分方程式に代入すると、

$$Ae^{-x} + 5Ae^{-x} + 6Ae^{-x} = e^{-x}$$

よって、　$A = \frac{1}{12}$ となるので、$y_0 = \frac{1}{12}e^{-x}$

以上より、与式の一般解は

$$y = \underline{\frac{1}{12}e^{-x} + C_1e^{2x} + C_2e^{3x}}$$

（9）　$y'' - 3y' + 2y = \cos x$

$y'' - 3y' + 2y = \cos x$ の同伴方程式 $y'' - 3y' + 2y = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ を解くと

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$
$$\lambda = 1,\ 2$$

であるから、この基本解は、$Y_1 = e^{x}, Y_2 = e^{2x}$ となる。このとき、ロンスキアンは、

$$W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{2x} \\ e^{x} & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x} - e^{3x} = e^{3x} \neq 0$$

特殊解を$y_0 = A\cos x + B\sin x$ とおき、微分方程式に代入すると、

$$(-A\cos x - B\sin x) - 3(-A\sin x + B\cos x) + 2(A\cos x + B\sin x) = \cos x$$
$$(-B + 3A + 2B)\sin x + (-A - 3B + 2A)\cos x = \cos x$$
$$(3A + B)\sin x + (A - 3B)\cos x = \cos x$$

よって、　$A = \frac{1}{10},\ B = -\frac{3}{10}$ となるので、$y_0 = \frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x$

以上より、与式の一般解は

$$y = \underline{\frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x + C_1e^{x} + C_2e^{2x}}$$

物理数学教科書 P.35 演習問題[5]より

（10）　$y'' + 3y' + 2y = xe^{x}$

$y'' + 3y' + 2y = xe^x$ の同伴方程式 $y'' + 3y' + 2y = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ を解くと

$$(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$
$$\lambda = -1, -2$$

であるから、この基本解は、$Y_1 = e^{-x}, Y_2 = e^{-2x}$ となる。このとき、ロンスキアンは、

$$W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -2e^{-3x} + e^{-3x} = e^{-3x} \neq 0$$

特殊解を$y_0 = Axe^x + Be^x$ とおき、微分方程式に代入すると、

$$\{(x+2)Ae^x + Be^x\} + 3\{(x+1)Ae^x + Be^x\} + 2\{Axe^x + Be^x\} = xe^x$$
$$(6A)xe^x + (5A + 6B)e^x = xe^x$$

よって、　$A = \frac{1}{6},\ B = -\frac{5}{36}$ となるので、$y_0 = \frac{1}{6}xe^x - \frac{5}{36}e^x$

以上より、与式の一般解は

$$y = \underline{\frac{1}{6}xe^x - \frac{5}{36}e^x + C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}}$$

キャンパス・ゼミ 演習 常微分方程式 P.54 演習問題 29

（11） $y'' - 3y' + 2y = 4x^2$

$y'' - 3y' + 2y = x^2$ の同伴方程式 $y'' - 3y' + 2y = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ を解くと

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$
$$\lambda = 1, 2$$

であるから、この基本解は、$Y_1 = e^x, Y_2 = e^{2x}$ となる。このとき、ロンスキアンは、

$$W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x} - e^{3x} = e^{3x} \neq 0$$

2 次の多項式であるので特殊解を $y_0 = Ax^2 + Bx + C$ とおき、微分方程式に代入すると、

$$2A - 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = 4x^2$$
$$2Ax^2 + (-6A + 2B)x + (2A - 3B + 2C) = 4x^2$$

よって、　$A = 2,\ B = 6,\ C = 7$ となるので、$y_0 = 2x^2 + 6x + 7$

以上より、与式の一般解は

$$y = \underline{2x^2 + 6x + 7 + C_1e^x + C_2e^{2x}}$$

(12)　$y'' + y = \tan x$

$y'' + y = \tan x$ の同伴方程式 $y'' + y = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 + 1 = 0$ を解くと

$$\lambda = \pm i$$

であるから、この基本解は、$Y_1 = \cos x, Y_2 = \sin x$ となる。このとき、ロンスキアンは、

$$W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

よって、公式　$y_0 = -Y_1 \int \frac{Y_2 R(x)}{W(Y_1, Y_2)} dx + Y_2 \int \frac{Y_1 R(x)}{W(Y_1, Y_2)} dx$　に代入すると、

$$y_0 = -\cos x \int \sin x \tan x \, dx + \sin x \int \cos x \tan x \, dx$$

$$= -\cos x \int \sin x \tan x \, dx + \sin x \int \sin x \, dx$$

$$= -\cos x \left(-\cos x \tan x + \int \frac{1}{\cos x} dx \right) - \sin x \cos x$$

$$= -\cos x \left\{ \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| \right\}$$

以上より、与式の一般解は

$$y = \underline{-\cos x \left\{ \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| \right\} + C_1 \cos x + C_2 \sin x}$$

(13)　$y'' - 2y' + y = e^x \log x$

$y'' - 2y' + y = e^x \log x$ の同伴方程式 $y'' - 2y' + y = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ を解くと

$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

$$\lambda = 1 \quad (\text{重解})$$

であるから、この基本解は、$Y_1 = e^x, Y_2 = xe^x$ となる。このとき、ロンスキアンは、

$$W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (1 + x)e^x \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0$$

よって、公式　$y_0 = -Y_1 \int \frac{Y_2 R(x)}{W(Y_1, Y_2)} dx + Y_2 \int \frac{Y_1 R(x)}{W(Y_1, Y_2)} dx$　に代入すると、

$$y_0 = -e^x \int \frac{xe^x \cdot e^x \log x}{e^{2x}} dx + xe^x \int \frac{e^x \cdot e^x \log x}{e^{2x}} dx$$

$$= -e^x \int x \log x \, dx + xe^x \int \log x \, dx$$

$$= -e^x \left\{ \frac{1}{4} x^2 (2 \log x - 1) \right\} + xe^x \{ x(\log x - 1) \}$$

$$= e^x \left\{ \frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{3}{4} x^2 \right\}$$

以上より、与式の一般解は

$$\underline{y = e^x \left\{ \frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{3}{4} x^2 \right\} + C_1 e^x + C_2 x e^x}$$

キャンパス・ゼミ 演習 常微分方程式 P.58 演習問題 30

(14) $\boldsymbol{y'' - 5y' + 6y = -xe^{3x}}$

$y'' - 5y' + 6y = e^{-x}$ の同伴方程式 $y'' - 5y' + 6y = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ を解くと

$$(\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda = 2, 3$$

であるから、この基本解は、$Y_1 = e^{2x}, Y_2 = e^{3x}$ となる。このとき、ロンスキアンは、

$$W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^x & 3e^{3x} \end{vmatrix} = 3e^{5x} - 2e^{5x} = e^{5x} \neq 0$$

よって、公式　$y_0 = -Y_1 \int \frac{Y_2 R(x)}{W(Y_1, Y_2)} dx + Y_2 \int \frac{Y_1 R(x)}{W(Y_1, Y_2)} dx$　に代入すると、

$$y_0 = -e^{2x} \int \frac{e^{3x} \cdot (-xe^{3x})}{e^{5x}} dx + e^{3x} \int \frac{e^{2x} \cdot (-xe^{3x})}{e^{5x}} dx$$

$$= -e^{2x} \int xe^x \, dx - e^{3x} \int x \, dx$$

$$= -e^{2x} \left\{ xe^x - \int e^x \, dx \right\} - e^{3x} \left\{ \frac{1}{2} x^2 \right\}$$

$$= -e^{3x} \left\{ \frac{1}{2} x^2 - x + 1 \right\}$$

以上より、与式の一般解は

$$\underline{y = -e^{3x} \left\{ \frac{1}{2} x^2 - x + C_2 \right\} + C_1 e^{2x}}$$

(15)　$y'' + y = \sin x + \sin 2x$

$y'' + y = \sin x + \sin 2x$ の同伴方程式 $y'' + y = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 + 1 = 0$ を解くと

$$\lambda = \pm i$$

であるから、この基本解は、$Y_1 = \cos x\,, Y_2 = \sin x$ となる。このとき、ロンスキアンは、

$$W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1{}' & Y_2{}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

また、与式の特殊解 y_0 は、

$$\begin{cases} y'' + y = \sin x & \text{の解 } y_{01} \\ y'' + y = \sin 2x & \text{の解 } y_{02} \end{cases}$$

の和である $y_0 = y_{01} + y_{02}$ となる。

公式　$y_0 = -Y_1 \int \frac{Y_2 R(x)}{W(Y_1, Y_2)} dx + Y_2 \int \frac{Y_1 R(x)}{W(Y_1, Y_2)} dx$　に代入すると、

$$\begin{aligned}
y_{01} &= -\cos x \int \frac{\sin x \cdot \sin x}{1} dx + \sin x \int \frac{\cos x \cdot \sin x}{1} dx \\
&= -\cos x \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx + \sin x \int \frac{\sin 2x}{2} dx \\
&= -\frac{\cos x}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + \frac{\sin x}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) dx \\
&= \frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{2} x \cos x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{02} &= -\cos x \int \frac{\sin x \cdot \sin 2x}{1} dx + \sin x \int \frac{\cos x \cdot \sin 2x}{1} dx \\
&= \cos x \int \frac{\cos 3x - \cos x}{2} dx + \sin x \int \frac{\sin 3x + \sin x}{2} dx \\
&= \frac{1}{2}\cos x \left(\frac{1}{3}\sin 3x - \sin x\right) + \frac{1}{2}\sin x \left(-\frac{1}{3}\cos 3x - \cos x\right) dx \\
&= \frac{1}{6}(\cos x \sin 3x - \sin x \cos 3x) - \sin x \cos x \\
&= \frac{1}{6}\sin 2x - \frac{1}{2}\sin 2x = -\frac{1}{3}\sin 2x
\end{aligned}$$

よって、

$$
\begin{aligned}
y_0 &= y_{01} + y_{02} \\
&= \frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{2}x\cos x - \frac{1}{3}\sin 2x
\end{aligned}
$$

以上より、与式の一般解は

$$
y = \underline{\frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{2}x\cos x - \frac{1}{3}\sin 2x + C_1\cos x + C_2\sin x}
$$

(16)　$\boldsymbol{y'' + 8y' + 16y = 4e^{-2x}}$

$y'' + 8y' + 16y = 4e^{-2x}$ の同伴方程式 $y'' + 8y' + 16y = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$ を解くと

$$
\begin{aligned}
(\lambda + 4)^2 &= 0 \\
\lambda &= -4
\end{aligned}
$$

であるから、この基本解は、$Y_1 = e^{-4x}, Y_2 = xe^{-4x}$ となる。このとき、ロンスキアンは、

$$
W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-4x} & xe^{-4x} \\ -4e^{-4x} & (-4x+1)e^{-4x} \end{vmatrix} = e^{-8x} \neq 0
$$

よって、公式　$y_0 = -Y_1\int \frac{Y_2 R(x)}{W(Y_1,Y_2)}dx + Y_2\int \frac{Y_1 R(x)}{W(Y_1,Y_2)}dx$　に代入すると、

$$
\begin{aligned}
y_0 &= -e^{-4x}\int \frac{xe^{-4x}\cdot 4e^{-2x}}{e^{-8x}}dx + xe^{-4x}\int \frac{e^{-4x}\cdot 4e^{-2x}}{e^{-8x}}dx \\
&= -4e^{-4x}\int xe^{2x}\,dx + 4xe^{-4x}\int e^{2x}\,dx \\
&= -4e^{-4x}\left\{\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx\right\} + 4xe^{-4x}\left\{\frac{1}{2}e^{2x}\right\} \\
&= -2xe^{-2x} + e^{-2x} + 2xe^{-2x} \\
&= e^{-2x}
\end{aligned}
$$

以上より、与式の一般解は

$$
y = \underline{e^{-2x} + C_1 e^{-4x} + C_2 xe^{-4x}}
$$

$\boxed{\text{微分積分教科書 P.206 問 8（レポートに出題）}}$

(17)　$\boldsymbol{y'' + y' - 2y = x^2}$

$y'' + y' - 2y = x^2$ の同伴方程式 $y'' + y' - 2y = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ を解くと

$$
(\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0
$$

$$\lambda = 1, -2$$

であるから、この基本解は、$Y_1 = e^x, Y_2 = e^{-2x}$ となる。このとき、ロンスキアンは、

$$W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1{}' & Y_2{}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-2x} \\ e^x & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -2e^{-x} - e^{-x} = -3e^{-x} \neq 0$$

よって、公式　$y_0 = -Y_1 \int \frac{Y_2 R(x)}{W(Y_1,Y_2)} dx + Y_2 \int \frac{Y_1 R(x)}{W(Y_1,Y_2)} dx$　に代入すると、

$$\begin{aligned} y_0 &= -e^x \int \frac{e^{-2x} \cdot x^2}{-3e^{-x}} dx + e^{-2x} \int \frac{e^x \cdot x^2}{-3e^{-x}} dx \\ &= \frac{e^x}{3} \int x^2 e^{-x}\, dx - \frac{e^{-2x}}{3} \int x^2 e^{2x}\, dx \\ &= \frac{e^x}{3}\{-e^x(x^2 + 2x + 2)\} - \frac{e^{-2x}}{3}\left\{\frac{e^{2x}}{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)\right\} \\ &= -\frac{1}{3}(x^2 + 2x + 2) - \frac{1}{6}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

以上より、与式の一般解は

$$y = \underline{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + C_1 e^x + C_2 x e^{-2x}}$$

(18)　$y'' - 4y' + 4y = e^{3x}$

$y'' - 4y' + 4y = e^{3x}$ の同伴方程式 $y'' - 4y' + 4y = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ を解くと

$$(\lambda - 2)^2 = 0$$
$$\lambda = 2$$

であるから、この基本解は、$Y_1 = e^{2x}, Y_2 = xe^{2x}$ となる。このとき、ロンスキアンは、

$$W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1{}' & Y_2{}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & (2x+1)e^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x} \neq 0$$

よって、公式　$y_0 = -Y_1 \int \frac{Y_2 R(x)}{W(Y_1,Y_2)} dx + Y_2 \int \frac{Y_1 R(x)}{W(Y_1,Y_2)} dx$　に代入すると、

$$y_0 = -e^{2x} \int \frac{xe^{2x} \cdot e^{3x}}{e^{4x}} dx + xe^{2x} \int \frac{e^{2x} \cdot e^{3x}}{e^{4x}} dx$$

$$= -e^{2x}\int xe^{x}\,dx + xe^{2x}\int e^{x}\,dx$$

$$= -e^{2x}\left\{xe^{x} - \int e^{x}\,dx\right\} + xe^{2x}\int e^{x}\,dx$$

$$= -e^{2x}\{xe^{x} - e^{x}\} + xe^{3x}dx$$

$$= e^{3x}$$

以上より、与式の一般解は

$$y = \underline{e^{3x} + C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}}$$

(19)　$y'' + y' - 6y = \sin x$

$y'' + y' - 6y = \sin x$ の同伴方程式 $y'' + y' - 6y = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ を解くと

$$(\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0$$

$$\lambda = 2, -3$$

であるから、この基本解は、$Y_1 = e^{2x}, Y_2 = e^{-3x}$ となる。このとき、ロンスキアンは、

$$W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1{}' & Y_2{}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-3x} \\ 2e^{2x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -3e^{-x} - 2e^{-x} = -5e^{-x} \neq 0$$

よって、公式　$y_0 = -Y_1\int \frac{Y_2R(x)}{W(Y_1,Y_2)}dx + Y_2\int \frac{Y_1R(x)}{W(Y_1,Y_2)}dx$　に代入すると、

$$y_0 = -e^{2x}\int \frac{e^{-3x}\cdot\sin x}{-5e^{-x}}dx + e^{-3x}\int \frac{e^{2x}\cdot\sin x}{-5e^{-x}}dx$$

$$= \frac{e^{2x}}{5}\int e^{-2x}\sin x\,dx - \frac{e^{-3x}}{5}\int e^{3x}\sin x\,dx$$

$$= \frac{e^{2x}}{5}\left\{\frac{e^{-2x}}{5}(-2\sin x - \cos x)\right\} - \frac{e^{-3x}}{5}\left\{\frac{e^{3x}}{10}(3\sin x - \cos x)\right\}$$

$$= \frac{1}{25}(-2\sin x - \cos x) - \frac{1}{50}(3\sin x - \cos x)$$

$$= -\frac{7}{50}\sin x - \frac{1}{50}\cos x$$

以上より、与式の一般解は

$$y = \underline{-\frac{7}{50}\sin x - \frac{1}{50}\cos x + C_1e^{2x} + C_2e^{-3x}}$$

微分積分教科書 P.206 問 9

(20)　$y'' + y' = 2x + 1$

$y'' + y' = 2x + 1$ の同伴方程式 $y'' + y' = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 + \lambda = 0$ を解くと

$$\lambda(\lambda + 1) = 0$$
$$\lambda = 0, -1$$

であるから、この基本解は、$Y_1 = 1, Y_2 = e^{-x}$ となる。このとき、ロンスキアンは、

$$W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & e^{-x} \\ 0 & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^{-x} - 0 = -e^{-x} \neq 0$$

よって、公式　$y_0 = -Y_1 \int \frac{Y_2 R(x)}{W(Y_1,Y_2)} dx + Y_2 \int \frac{Y_1 R(x)}{W(Y_1,Y_2)} dx$　に代入すると、

$$y_0 = -\int \frac{e^{-x} \cdot (2x+1)}{-e^{-x}} dx + e^{-x} \int \frac{1 \cdot (2x+1)}{-e^{-x}} dx$$
$$= \int (2x+1)\, dx - e^{-x} \int (2x+1) e^{x}\, dx$$
$$= (x^2 + x) - e^{-x}\{2xe^{x} + e^{x}\}$$
$$= (x^2 + x) - (2x + 1)$$
$$= x^2 - x - 1$$

以上より、与式の一般解は

$$y = \underline{x^2 - x + C_1 + C_2 e^{-x}}$$

(21)　$y'' + 2y' + y = e^{-x}$

$y'' + 2y' + y = e^{-x}$ の同伴方程式 $y'' + 2y' + y = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ を解くと

$$(\lambda + 1)^2 = 0$$
$$\lambda = -1$$

であるから、この基本解は、$Y_1 = e^{-x}, Y_2 = xe^{-x}$ となる。このとき、ロンスキアンは、

$$W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & (1-x)e^{-x} \end{vmatrix} = e^{-2x} \neq 0$$

よって、公式　$y_0 = -Y_1 \int \frac{Y_2 R(x)}{W(Y_1,Y_2)} dx + Y_2 \int \frac{Y_1 R(x)}{W(Y_1,Y_2)} dx$　に代入すると、

$$y_0 = -e^{-x} \int \frac{xe^{-x} \cdot e^{-x}}{e^{-2x}} dx + xe^{-x} \int \frac{e^{-x} \cdot e^{-x}}{e^{-2x}} dx$$

$$= -e^{-x}\int x\,dx + xe^{-x}\int dx$$

$$= -\frac{1}{2}x^2e^{-x} + x^2e^{-x}$$

$$= \frac{1}{2}x^2e^{-x}$$

以上より、与式の一般解は

$$\underline{y = \frac{1}{2}x^2e^{-x} + C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}}$$

（22） $y'' + y = \sin x + \cos x$

$y'' + y = \sin x + \cos x$ の同伴方程式 $y'' + y = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 + 1 = 0$ を解くと

$$\lambda = \pm i$$

であるから、この基本解は、$Y_1 = \cos x\,, Y_2 = \sin x$ となる。このとき、ロンスキアンは、

$$W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1{}' & Y_2{}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

また、与式の特殊解 y_0 は、

$$\begin{cases} y'' + y = \sin x & \text{の解 } y_{01} \\ y'' + y = \cos x & \text{の解 } y_{02} \end{cases}$$

の和である $y_0 = y_{01} + y_{02}$ となる。

公式　$y_0 = -Y_1\int \frac{Y_2R(x)}{W(Y_1,Y_2)}dx + Y_2\int \frac{Y_1R(x)}{W(Y_1,Y_2)}dx$　に代入すると、

$$y_{01} = -\cos x\int \frac{\sin x \cdot \sin x}{1}dx + \sin x\int \frac{\cos x \cdot \sin x}{1}dx$$

$$= -\cos x\int \frac{1-\cos 2x}{2}dx + \sin x\int \frac{\sin 2x}{2}dx$$

$$= -\frac{\cos x}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + \frac{\sin x}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{2}x\cos x$$

$$y_{02} = -\cos x\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{1}dx + \sin x\int \frac{\cos x \cdot \cos x}{1}dx$$

$$= -\cos x \int \frac{\sin 2x}{2} dx + \sin x \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx$$

$$= -\frac{\cos x}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) + \frac{\sin x}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\cos x + \frac{1}{2} x \sin x$$

よって、

$$y_0 = y_{01} + y_{02}$$

$$= \frac{1}{2} x(\sin x - \cos x) + \frac{1}{4}(\sin x + \cos x)$$

以上より、与式の一般解は

$$y = \frac{1}{2} x(\sin x - \cos x) + \frac{1}{4}(\sin x + \cos x) + C_1{}' \cos x + C_2{}' \sin x$$

$$= \underline{\frac{1}{2} x(\sin x - \cos x) + C_1 \cos x + C_2 \sin x}$$

次の微分方程式の一般解 y を、その同伴方程式の基本解の 1 つ Y_1 に対して $y = u(x)Y_1$ とおくことで求めよ。

キャンパス・ゼミ 演習 常微分方程式 P.54 演習問題 29

(1) $y'' - 3y' + 2y = 4x^2$

$y'' - 3y' + 2y = 4x^2$の同伴方程式 $y'' - 3y' + 2y = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ を解くと

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda = 1, 2$$

であるから、この基本解の一つは、$Y_1 = e^x$ である。このとき、一般解 を

$$y = u(x)e^x$$

とおく。この式を順に 2 階微分して、

$$y' = u(x)'e^x + u(x)e^x$$

$$y'' = u(x)''e^x + 2u(x)'e^{2x} + u(x)e^x$$

これらを元の微分方程式に代入すると

$$(u(x)''e^x + 2u(x)'e^x + u(x)e^x) - 3(u(x)'e^x + u(x)e^x) + 2u(x)e^x = 4x^2$$

$$e^x u(x)'' + (2e^x - 3e^x)u(x)' + (e^x - 3e^x + 2e^x)u(x) = 4x^2$$

$$e^x u(x)'' - e^x u(x)' = 4x^2$$

ここで、$u(x)' = p(x)$, とおくと、$u(x)'' = p(x)'$

$$p(x)' - p(x) = 4x^2e^{-x}$$

これは 1 階の線形微分方程式となる。

よって、解の公式より、

$$p(x) = \frac{du}{dx} = e^{\int dx}\left\{\int 4x^2e^{-x}e^{-\int dx}\,dx + C_1\right\}$$

$$= e^x\left\{\int 4x^2e^{-2x}\,dx + C_1\right\} = e^x\left\{4e^{-2x}\left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) + C_1\right\}$$

$$= 4e^{-x}\left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) + C_1e^x$$

$$\therefore u = \int \{e^{-x}(-2x^2 - 2x - 1)\}\,dx + C_1\int e^x\,dx$$

$$= -\{-2e^{-x}(x^2 + 2x + 2) - 2e^{-x}(x + 1) - e^{-x}\} + C_1e^x$$

$$= e^{-x}(2x^2 + 6x + 7) + C_1e^x$$

以上より、

$$y = u(x)e^x = e^x\{e^{-x}(2x^2 + 6x + 7) + C_1e^x\}$$

$$= \underline{2x^2 + 6x + 7 + C_1e^{2x} + C_2e^x}$$

(2)　$y'' + y = \tan x$

$y'' + y = \tan x$の同伴方程式 $y'' + y = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 + 1 = 0$ を解くと

$$\lambda = \pm i$$

であるから、この基本解の一つは、$Y_1 = \cos x$ である。このとき、一般解 を

$$y = u(x)\cos x$$

とおく。この式を順に 2 階微分して、

$$y' = u(x)'\cos x - u(x)\sin x$$

$$y'' = u(x)''\cos x - 2u(x)'\sin x - u(x)\cos x$$

これらを元の微分方程式に代入すると

$$(u(x)''\cos x - 2u(x)'\sin x - u(x)\cos x) + u(x)\cos x = \tan x$$

$$\cos x\, u(x)'' - (2\sin x)u(x)' = \tan x$$

$$u(x)'' - 2\tan x\, u(x)' = \frac{\tan x}{\cos x}$$

ここで、$u(x)' = p(x)$, とおくと、$u(x)'' = p(x)'$

$$p(x)' - 2\tan x\, p(x) = \frac{\tan x}{\cos x}$$

これは 1 階の線形微分方程式となる。

よって、解の公式より、

$$p(x)=\frac{du}{dx}=e^{2\int \tan x dx}\left(\int \frac{\tan x}{\cos x}e^{-2\int \tan x dx}\,dx+C_1\right)$$

ここで、$e^{\pm 2\int \tan x dx}=e^{\mp 2\int \frac{(-\cos x)'}{\cos x}dx}=e^{\mp 2\log|\cos x|}=\cos^{\mp 2}x$ であるから

$$=\frac{1}{\cos^2 x}\left(\int \frac{\tan x}{\cos x}\cos^2 x\,dx+C_1\right)=\frac{1}{\cos^2 x}\left(\int \sin x\,dx+C_1\right)$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}(-\cos x+C_1)=-\frac{1}{\cos x}+\frac{C_1}{\cos^2 x}$$

$$\therefore u=-\int\left(\frac{1}{\cos x}\right)dx+C_1\int\frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$=-\log\left|\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right|+C_1\tan x$$

以上より、

$$y=\ u(x)\cos x=\cos x\left\{-\log\left|\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right|+C_1\tan x\right\}$$

$$=\underline{-\cos x\cdot\log\left|\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right|+C_1\sin x+C_2\cos x}$$

(3) $\boldsymbol{y''-2y'+y=e^x\log x}$

$y''-2y'+y=e^x\log x$の同伴方程式 $y''-2y'+y=0$ の特性方程式 $\lambda^2-2\lambda+1=0$ を解くと

$$(\lambda-1)^2=0$$
$$\lambda=1$$

であるから、この基本解の一つは、$Y_1=e^x$ である。このとき、一般解 を

$$y=u(x)e^x$$

とおく。この式を順に 2 階微分して、

$$y'=u(x)'e^x+u(x)e^x$$
$$y''=u(x)''e^x+2u(x)'e^x+u(x)e^x$$

これらを元の微分方程式に代入すると

$$(u(x)''e^x+2u(x)'e^x+u(x)e^x)-2(u(x)'e^x+u(x)e^x)+u(x)e^x=e^x\log x$$
$$e^xu(x)''+(2e^x-2e^x)u(x)'+(e^x-2e^x+e^x)u(x)=e^x\log x$$
$$e^xu(x)''=e^x\log x$$
$$u(x)''=\log x$$

これを順次積分して、

$$u(x)'=\int\log x\,dx=x\log x-x+C_1$$

$$u(x) = \int (x\log x - x + C_1)\,dx = \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 + C_1x$$

$$= \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{3}{4}x^2 + C_1x$$

以上より、

$$y = u(x)e^x = e^x\left\{\frac{1}{2}x^2\log x - \frac{3}{4}x^2 + C_1x\right\} + C_2e^x$$

$$= \underline{\left(\frac{1}{2}x^2\log x - \frac{3}{4}x^2 + C_1x + C_2\right)e^x}$$

キャンパス･ゼミ 演習 常微分方程式 P.58 演習問題 30

(4)　$y'' - 5y' + 6y = -xe^{3x}$

$y'' - 5y' + 6y = -xe^{3x}$の同伴方程式 $y'' - 5y' + 6y = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ を解くと

$$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda = 2, 3$$

であるから、この基本解の一つは、$Y_1 = e^{2x}$ である。このとき、一般解 を

$$y = u(x)e^{2x}$$

とおく。この式を順に 2 階微分して、

$$y' = u(x)'e^{2x} + 2u(x)e^{2x}$$

$$y'' = u(x)''e^{2x} + 4u(x)'e^{2x} + 4u(x)e^x$$

これらを元の微分方程式に代入すると

$$(u(x)''e^{2x} + 4u(x)'e^{2x} + 4u(x)e^x) - 5(u(x)'e^{2x} + 2u(x)e^{2x}) + 6u(x)e^x = -xe^{3x}$$

$$e^{2x}u(x)'' + (4e^{2x} - 5e^{2x})u(x)' + (4e^{2x} - 10e^{2x} + 6e^{2x})u(x) = -xe^{3x}$$

$$e^{2x}u(x)'' - e^{2x}u(x)' = -xe^{3x}$$

$$u(x)'' - u(x)' = -xe^x$$

ここで、$u(x)' = p(x)$, とおくと、$u(x)'' = p(x)'$

$$p(x)' - p(x) = -xe^x$$

これは 1 階の線形微分方程式となる。

よって、解の公式より、

$$p(x) = \frac{du}{dx} = e^{\int dx}\left\{\int -xe^xe^{-\int dx}\,dx + C_1\right\}$$

$$= e^x\left\{\int -x\,dx + C_1\right\} = e^x\left\{-\frac{1}{2}x^2 + C_1\right\}$$

$$\therefore u = \int\left\{e^x\left(-\frac{1}{2}x^2 + C_1\right)\right\}dx + C_1\int e^x\,dx$$

$$= e^x\left(-\frac{1}{2}x^2 + C_1\right) + \int xe^x\,dx$$

$$= e^x\left(-\frac{1}{2}x^2 + C_1\right) + (x-1)e^x + C_2$$

$$= e^x\left(-\frac{1}{2}x^2 + x + C_{11}\right)$$

以上より、

$$y = u(x)e^{2x}$$
$$= \underline{e^{3x}\left\{-\frac{1}{2}x^2 + x + C_{11}\right\} + C_2e^{2x}}$$

(5)　$y'' + 8y' + 16y = 4e^{-2x}$

$y'' + 8y' + 16y = 4e^{-2x}$の同伴方程式 $y'' + 8y' + 16y = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$ を解くと

$$(\lambda + 4)^2 = 0$$
$$\lambda = -4$$

であるから、この基本解の一つは、$Y_1 = e^{-4x}$ である。このとき、一般解 を

$$y = u(x)e^{-4x}$$

とおく。この式を順に 2 階微分して、

$$y' = u(x)'e^{-4x} - 4u(x)e^{-4x}$$
$$y'' = u(x)''e^{-4x} - 8u(x)'e^{-4x} + 16u(x)e^{-4x}$$

これらを元の微分方程式に代入すると

$$(u(x)''e^{-4x} - 8u(x)'e^{-4x} + 16u(x)e^{-4x}) + 8(u(x)'e^{-4x} - 4u(x)e^{-4x}) + 16u(x)e^{-4x}$$
$$= 4e^{-2x}$$

$$e^{-4x}u(x)'' + (-8e^{-4x} + 8e^{-4x})u(x)' + (16e^x - 32e^x + 16e^x)u(x) = 4e^{-2x}$$

$$e^{-4x}u(x)'' = 4e^{-2x}$$

$$u(x)'' = 4e^{2x}$$

これを順次積分して、

$$u(x)' = \int 4e^{2x}\,dx = 2e^{2x} + C_1$$

$$u(x) = \int (2e^{2x} + C_1)\,dx = e^{2x} + C_1x + C_2$$

以上より、

$$y = u(x)e^{-4x} = e^{-4x}\{e^{2x} + C_1x + C_2\}$$
$$= \underline{e^{-2x} + C_1xe^{-4x} + C_2e^{-4x}}$$

➢ 一般の 2 階非同次線形微分方程式

次の一般の 2 階非同次線形微分方程式の一般解を求めよ。

キャンパス・ゼミ常微分方程式 P.114 演習問題 7（レポートに出題）

(1) $\boldsymbol{y'' - \frac{x+2}{x}y' + \frac{2}{x}y = x^2e^x}$ **ただし、基本解の1つを $\boldsymbol{Y_1 = e^x}$ とせよ**

$y'' - \frac{x+2}{x}y' + \frac{2}{x}y = x^2e^x$ の同伴方程式 $y'' - \frac{x+2}{x}y' + \frac{2}{x}y = 0$ について、

基本解の 1 つ $Y_1 = e^x$ おくと、

$$Y_1{}'' = Y_1{}' = e^x$$

であるから、同伴方程式の左辺に代入すると、

$$e^x - \frac{x+2}{x}e^x + \frac{2}{x}e^x = e^x\left(1 - 1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x}\right) = 0$$

となるので、同伴方程式の 1 つの解であることが分かる。

与式の一般解 を

$$y = u(x)e^x$$

とおくと、

$$y' = u(x)'e^x + u(x)e^x$$

$$y'' = u(x)''e^x + 2u(x)'e^{2x} + u(x)e^x$$

である。これらを元の微分方程式に代入すると

$$(u(x)''e^x + 2u(x)'e^x + u(x)e^x) - \frac{x+2}{x}(u(x)'e^x + u(x)e^x) + \frac{2}{x}u(x)e^x = x^2e^x$$

$$e^xu(x)'' + \left(2e^x - \frac{x+2}{x}e^x\right)u(x)' + u(x)\left(e^x - \frac{x+2}{x}e^x + \frac{2}{x}e^x\right) = x^2e^x$$

$$e^xu(x)'' + \left(1 - \frac{2}{x}\right)e^xu(x)' = x^2e^x$$

$$u(x)'' + \left(1 - \frac{2}{x}\right)u(x)' = x^2$$

ここで、$u(x)' = p(x),$ とおくと、$u(x)'' = p(x)'$

$$p(x)' + \left(1 - \frac{2}{x}\right)p(x) = x^2$$

これは 1 階の線形微分方程式となる。

よって、解の公式より、

$$p(x) = \frac{du}{dx} = e^{\int -\left(1-\frac{2}{x}\right)dx}\left\{\int x^2e^{\int\left(1-\frac{2}{x}\right)dx}dx + C_1\right\}$$

ここで、$e^{\int \pm\left(1-\frac{2}{x}\right)dx} = e^{\pm(x-\log x^2)} = x^{\mp 2}e^{\pm x}$ であるから

$$= x^2e^{-x}\left\{\int x^2\,x^{-2}e^x dx + C_1\right\} = x^2e^{-x}\left\{\int e^x\,dx + C_1\right\}$$

$$= x^2e^{-x}\{e^x + C_1\} = x^2 + C_1x^2e^{-x}$$

$$\therefore u = \int \{x^2 + C_1x^2e^{-x}\}\,dx + C_2$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + C_1\{-e^{-x}(x^2+2x+2)\} + C_2$$

以上より、

$$y = u(x)e^x$$

$$= \frac{1}{3}x^3e^x - C_1(x^2+2x+2) + C_2e^x$$

キャンパス・ゼミ常微分方程式 P.116 実践問題 7

（2）　$y'' - \frac{x+1}{x}y' + \frac{1}{x}y = xe^x$　ただし、基本解の1つを $Y_1 = e^x$ とせよ

$y'' - \frac{x+1}{x}y' + \frac{1}{x}y = xe^x$ の同伴方程式 $y'' - \frac{x+1}{x}y' + \frac{1}{x}y = 0$ について、

基本解の 1 つ $Y_1 = e^x$ おくと、

$$Y_1{}'' = Y_1{}' = e^x$$

であるから、同伴方程式の左辺に代入すると、

$$e^x - \frac{x+1}{x}e^x + \frac{1}{x}e^x = e^x\left(1 - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right) = 0$$

となるので、同伴方程式の 1 つの解であることが分かる。

与式の一般解 を

$$y = u(x)e^x$$

とおくと、

$$y' = u(x)'e^x + u(x)e^x$$

$$y'' = u(x)''e^x + 2u(x)'e^{2x} + u(x)e^x$$

である。これらを元の微分方程式に代入すると

$$(u(x)''e^x + 2u(x)'e^x + u(x)e^x) - \frac{x+1}{x}(u(x)'e^x + u(x)e^x) + \frac{1}{x}u(x)e^x = xe^x$$

$$e^xu(x)'' + \left(2e^x - \frac{x+1}{x}e^x\right)u(x)' + u(x)\left(e^x - \frac{x+1}{x}e^x + \frac{1}{x}e^x\right) = xe^x$$

$$e^xu(x)'' + \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^xu(x)' = xe^x$$

$$u(x)'' + \left(1 - \frac{1}{x}\right)u(x)' = x$$

ここで、$u(x)' = p(x)$, とおくと、$u(x)'' = p(x)'$

$$p(x)' + \left(1 - \frac{1}{x}\right)p(x) = x$$

これは 1 階の線形微分方程式となる。

よって、解の公式より、

$$p(x) = \frac{du}{dx} = e^{\int -\left(1-\frac{1}{x}\right)dx}\left\{\int xe^{\int\left(1-\frac{1}{x}\right)dx}\,dx + C_1\right\}$$

ここで、$e^{\int \pm\left(1-\frac{1}{x}\right)dx} = e^{\pm(x-\log x)} = x^{\mp 1}e^{\pm x}$ であるから

$$= xe^{-x}\left\{\int x\,x^{-1}e^{x}dx + C_1\right\} = xe^{-x}\left\{\int e^{x}\,dx + C_1\right\}$$

$$= xe^{-x}\{e^{x} + C_1\} = x + C_1xe^{-x}$$

$$\therefore u = \int\{x + C_1xe^{-x}\}\,dx + C_2$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + C_1\{-e^{-x}(x+1)\} + C_2$$

以上より、

$$y = u(x)e^{x}$$

$$= \underline{\frac{1}{2}x^2e^{x} - C_1(x+1) + C_2e^{x}}$$

キャンパス・ゼミ演習 常微分方程式 P.70 演習問題 33

(3)　$y'' - \frac{2}{x^2}y = 9$　ただし、基本解の1つを $Y_1 = x^2$ とせよ

$y'' - \frac{2}{x^2}y = 9$ の同伴方程式 $y'' - \frac{2}{x^2}y = 0$ について、

基本解の 1 つ $Y_1 = x^2$ おくと、

$$Y_1{}' = 2x, \qquad Y_1{}'' = 2$$

であるから、同伴方程式の左辺に代入すると、

$$2 - \frac{2}{x^2}x^2 = 0$$

となるので、同伴方程式の 1 つの解であることが分かる。

与式の一般解 を

$$y = u(x)x^2$$

とおくと、

$$y' = u(x)'x^2 + 2u(x)x$$
$$y'' = u(x)''x^2 + 4u(x)'x + 2u(x)$$

である。これらを元の微分方程式に代入すると

$$\left(u(x)''x^2 + 4u(x)'x + 2u(x)\right) - \frac{2}{x^2}u(x)x^2 = 9$$
$$u(x)''x^2 + 4xu(x)' + u(x)(2-2) = 9$$
$$u(x)''x^2 + 4xu(x)' = 9$$
$$u(x)'' + \frac{4}{x}u(x)' = \frac{9}{x^2}$$

ここで、$u(x)' = p(x)$, とおくと、$u(x)'' = p(x)'$

$$p(x)' + \frac{4}{x}p(x) = \frac{9}{x^2}$$

これは 1 階の線形微分方程式となる。
よって、解の公式より、

$$p(x) = \frac{du}{dx} = e^{-\int\frac{4}{x}dx}\left\{\int \frac{9}{x^2}e^{\int\frac{4}{x}dx}\,dx + C_1\right\}$$

ここで、$e^{\mp\int\frac{4}{x}dx} = e^{\mp 4\log x} = x^{\mp 4}$ であるから

$$= x^{-4}\left\{\int \frac{9}{x^2}x^4 dx + C_1\right\} = x^{-4}\left\{9\int x^2\,dx + C_1\right\}$$
$$= x^{-4}\left\{9\frac{x^3}{3} + C_1\right\} = \frac{3}{x} + \frac{C_1}{x^4}$$
$$\therefore u = \int\left\{\frac{3}{x} + \frac{C_1}{x^4}\right\}dx + C_2$$
$$= -3\log x - \frac{C_1}{3x^3} + C_2$$

以上より、

$$y = u(x)x^2$$
$$= \underline{-3x^2\log x - \frac{C_1{}'}{x} + C_2x^2}$$

キャンパス・ゼミ演習 常微分方程式 P.72 演習問題 34

(4) $\boldsymbol{y'' - \frac{3x^2}{x^3+1}y' + \frac{3x}{x^3+1}y = 2(x^3+1)}$ **ただし、基本解の1つを $\boldsymbol{Y_1 = x}$ とせよ**

$y'' - \frac{3x^2}{x^3+1}y' + \frac{3x}{x^3+1}y = 2(x^3+1)$ の同伴方程式 $y'' - \frac{3x^2}{x^3+1}y' + \frac{3x}{x^3+1}y = 0$ について、

基本解の 1 つ $Y_1 = x$ おくと、

$$Y_1{}' = 1, \qquad Y_1{}'' = 0$$

であるから、同伴方程式の左辺に代入すると、

$$0 - \frac{3x^2}{x^3+1} + \frac{3x}{x^3+1}x = 0$$

となるので、同伴方程式の 1 つの解であることが分かる。

与式の一般解 を

$$y = u(x)x$$

とおくと、

$$y' = u(x)'x + u(x)$$
$$y'' = u(x)''x + 2u(x)'$$

である。これらを元の微分方程式に代入すると

$$(u(x)''x + 2u(x)') - \frac{3x^2}{x^3+1}\bigl(u(x)'x + u(x)\bigr) + \frac{3x}{x^3+1}u(x)x = 2(x^3+1)$$

$$u(x)''x + \left(2 - \frac{3x^3}{x^3+1}\right)u(x)' + \left(-\frac{3x^2}{x^3+1} + \frac{3x}{x^3+1}x\right)u(x) = 2(x^3+1)$$

$$u(x)''x + \left(2 - \frac{3x^3}{x^3+1}\right)u(x)' = 2(x^3+1)$$

$$u(x)'' + \left(\frac{2}{x} - \frac{3x^2}{x^3+1}\right)u(x)' = \frac{2(x^3+1)}{x}$$

ここで、$u(x)' = p(x)$, とおくと、$u(x)'' = p(x)'$

$$p(x)' + \left(\frac{2}{x} - \frac{3x^2}{x^3+1}\right)p(x) = \frac{2(x^3+1)}{x}$$

これは 1 階の線形微分方程式となる。

よって、解の公式より、

$$p(x) = \frac{du}{dx} = e^{-\int\left(\frac{2}{x}-\frac{3x^2}{x^3+1}\right)dx}\left\{\int \frac{2(x^3+1)}{x} e^{\int\left(\frac{2}{x}-\frac{3x^2}{x^3+1}\right)dx}\,dx + C_1\right\}$$

ここで、$e^{\mp\int\left(\frac{2}{x}-\frac{3x^2}{x^3+1}\right)dx} = e^{\mp\{2\log x - \log(x^3+1)\}} = x^{\mp 2}\cdot(x^3+1)^{\pm 1}$であるから

$$= x^{-2}\cdot(x^3+1)\left\{\int \frac{2(x^3+1)}{x}x^2\cdot(x^3+1)^{-1}\,dx + C_1\right\}$$

$$= \frac{x^3+1}{x^2}\left\{\int 2x\,dx + C_1\right\} = \frac{x^3+1}{x^2}(x^2+C_1)$$

$$= x^3 + 1 + C_1x + C_1\frac{1}{x^2}$$

$$\therefore u = \int\left\{x^3 + 1 + C_1x + C_1\frac{1}{x^2}\right\}dx + C_2$$

$$= \frac{x^4}{4} + x + \frac{C_1 x^2}{2} - C_1 \frac{1}{x} + C_2 = \frac{x^4}{4} + x + C_1\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x}\right) + C_2$$

以上より、

$$y = u(x)x$$
$$= \underline{\frac{x^5}{4} + x^2 + C_1\left(\frac{x^3}{2} - 1\right) + C_2 x}$$

➢ 物理数学としての問題

物理数学教科書 P.28 例題 2.5

(1)　次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$\boldsymbol{\ddot{y} + {\omega_0}^2 y = F\cos\omega t}$$

(これは固有角周波数 $\boldsymbol{\omega_0}$ の振動子に外力 $\boldsymbol{F}$ を加えた時の振動子の振る舞いを示す)

$y'' + {\omega_0}^2 y = F\cos\omega t$ の同伴方程式 $y'' + {\omega_0}^2 y = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 + {\omega_0}^2 = 0$ を解くと

$$\lambda = \pm\omega_0 i$$

であるから、この基本解は、$Y_1 = \cos\omega_0 t\,, Y_2 = \sin\omega_0 t$ となる。このとき、ロンスキアンは、

$$W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ {Y_1}' & {Y_2}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\omega_0 t & \sin\omega_0 t \\ -\omega_0 \sin\omega_0 t & \omega_0\cos\omega_0 t \end{vmatrix}$$
$$= \omega_0\cos^2\omega_0 t + \omega_0\sin^2\omega_0 t = \omega_0 \neq 0$$

よって、公式　$y_0 = -Y_1\int\frac{Y_2 R(t)}{W(Y_1,Y_2)}dt + Y_2\int\frac{Y_1 R(t)}{W(Y_1,Y_2)}dt$　に代入すると、

$$y_0 = -\cos\omega_0 t\int\frac{\sin\omega_0 t\cdot F\cos\omega t}{\omega_0}dt + \sin\omega_0 t\int\frac{\cos\omega_0 t\cdot F\cos\omega t}{\omega_0}dt$$
$$= -\frac{F\cos\omega_0 t}{2\omega_0}\int(\sin(\omega_0+\omega)t + \sin(\omega_0-\omega)t)\,dt$$
$$+\frac{F\sin\omega_0 t}{2\omega_0}\int(\cos(\omega_0+\omega)t + \cos(\omega_0-\omega)t)\,dt$$

(i) $\omega_0 - \omega \neq 0$ のとき、

$$y_0 = -\frac{F\cos\omega_0 t}{2\omega_0}\left\{\frac{-\cos(\omega_0+\omega)t}{\omega_0+\omega} + \frac{-\cos(\omega_0-\omega)t}{\omega_0-\omega}\right\}$$
$$+\frac{F\sin\omega_0 t}{2\omega_0}\left\{\frac{\sin(\omega_0+\omega)t}{\omega_0+\omega} + \frac{\sin(\omega_0-\omega)t}{\omega_0-\omega}\right\}$$

$$= \frac{F\cos\omega_0 t\cos(\omega_0+\omega)\,t}{{\omega_0}^2-\omega^2} + \frac{F\sin\omega_0\,t\sin(\omega_0+\omega)\,t}{{\omega_0}^2-\omega^2}$$

$$= \frac{F}{{\omega_0}^2-\omega^2}\{\cos\omega_0 t\cos(\omega_0+\omega)\,t + \sin\omega_0\,t\sin(\omega_0+\omega)\,t\} -$$

$$= \frac{F}{{\omega_0}^2-\omega^2}\cos\omega t$$

以上より、与式の一般解は

$$y = \underline{\frac{F}{{\omega_0}^2-\omega^2}\cos\omega t + C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t}$$

(ii) $\omega_0-\omega=0$ すなわち $\omega_0=\omega$ のとき、

$$y_0 = -\frac{F\cos\omega_0 t}{2\omega_0}\int(\sin 2\omega_0\,t)\,dt + \frac{F\sin\omega_0\,t}{2\omega_0}\int(\cos 2\omega_0\,t+1)\,dt$$

$$= -\frac{F\cos\omega_0 t}{2\omega_0}\left\{\frac{-\cos 2\omega_0\,t}{2\omega_0}\right\} + \frac{F\sin\omega_0\,t}{2\omega_0}\left\{\frac{\sin 2\omega_0\,t}{2\omega_0}+t\right\}$$

$$= \frac{F}{2\omega_0}\left\{\frac{\cos\omega_0 t\cos 2\omega_0\,t}{2\omega_0} + \frac{\sin\omega_0\,t\sin 2\omega_0\,t}{2\omega_0}\right\} + \frac{F}{2\omega_0}t\sin\omega_0\,t$$

$$= \frac{F}{4{\omega_0}^2}\cos\omega_0 t + \frac{F}{2\omega_0}t\sin\omega_0\,t$$

以上より、与式の一般解は

$$y = \frac{F}{4{\omega_0}^2}\cos\omega_0 t + \frac{F}{2\omega_0}t\sin\omega_0\,t + C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t$$

$$= \underline{\frac{F}{2\omega_0}t\sin\omega_0\,t + C_1{}'\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t}$$

$\omega_0=\omega$ のとき、特解には t の一次が掛かっているので、時間とともに振幅 y は発散する。この減少を“共鳴”という。

物理数学教科書 P.36 演習問題[6]

(2) 体重計やアナログ式電圧計などの測定計器では、針の振れの大きさで測定値が得られる。この針は質量 m で、ばね定数 k のバネにつながれているとみなすことができる。このときの運動方程式は、

$$m\ddot{x} = -kx$$

と表され固有振動数 $\omega_0=\sqrt{k/m}$ で振動し続ける。そこに振れの速さに比例した摩擦力がは

たらくと

$$m\ddot{x} = -kx - \Gamma\dot{x} \quad (\Gamma > 0)$$

となる。この計器に一定の負荷（体重や電圧など）E_0 をかけたとすると、針にとってこれは外力とみなされる。よって、

$$m\ddot{x} = -kx - \Gamma\dot{x} + E_0$$

あるいは、$\Gamma = 2m\gamma,\ E_0 = me_0$ とおいて、

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + {\omega_0}^2 x = e_0$$

簡単のため、$\omega_0 = e_0 = 1$ として、

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + x = 1$$

を初期条件 $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ (針ははじめ 0 の位置からゆっくり動き始める)で求めよ。
$\gamma\ (> 0)$の値によって場合に分けて調べ、針の動き x の変化を図示せよ。

$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + x = 1$ の同伴方程式 $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + x = 0$ の特性方程式 $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + 1 = 0$ を解くと

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 1}$$

である。

(i) $\gamma > 1$ のとき、

この基本解は、$X_1 = e^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}\right)t}, X_2 = e^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-1}\right)t}$ となる。このとき、ロンスキアンは、

$$W(X_1, X_2) = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_1{}' & X_2{}' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} e^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}\right)t} & e^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-1}\right)t} \\ \left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}\right)e^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}\right)t} & \left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-1}\right)e^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-1}\right)x} \end{vmatrix}$$

$$= -2\sqrt{\gamma^2 - 1}e^{-2\gamma t} \neq 0$$

よって、公式　$x_0 = -X_1 \int \frac{X_2 R(x)}{W(X_1,X_2)} dt + X_2 \int \frac{X_1 R(x)}{W(X_1,X_2)} dt$　に代入すると、

$$x_0 = -e^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}\right)t} \int \frac{e^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-1}\right)t} \cdot 1}{-2\sqrt{\gamma^2-1}e^{-2\gamma t}} dt + e^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-1}\right)t} \int \frac{e^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}\right)t} \cdot 1}{-2\sqrt{\gamma^2-1}e^{-2\gamma t}} dt$$

$$= \frac{e^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}\right)t}}{2\sqrt{\gamma^2-1}} \int e^{\left(\gamma-\sqrt{\gamma^2-1}\right)t} dt - \frac{e^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-1}\right)t}}{2\sqrt{\gamma^2-1}} \int e^{\left(\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}\right)t} dt$$

$$=\frac{e^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}\right)t}e^{\left(\gamma-\sqrt{\gamma^2-1}\right)t}}{2\sqrt{\gamma^2-1}\left(\gamma-\sqrt{\gamma^2-1}\right)}-\frac{e^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-1}\right)t}e^{\left(\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}\right)t}}{2\sqrt{\gamma^2-1}\left(\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}\right)}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\gamma^2-1}\left(\gamma-\sqrt{\gamma^2-1}\right)}-\frac{1}{2\sqrt{\gamma^2-1}\left(\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}\right)}$$

$$=1$$

以上より、与式の一般解は

$$x=\underline{1+C_1e^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}\right)t}+C_2e^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-1}\right)t}}$$

となる。初期条件 $x(0)=\dot{x}(0)=0$ より

$$0=1+C_1+C_2$$

$$0=C_1\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}\right)+C_2\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-1}\right)$$

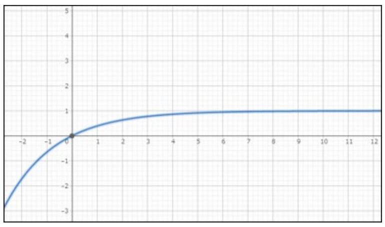
よって、

$$C_1=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2-1}}\right),\qquad C_2=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2-1}}\right)$$

となるので、

$$x=\underline{1-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2-1}}\right)e^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}\right)t}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2-1}}\right)e^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-1}\right)t}}$$

が得られる。$\gamma\to\infty$ とすると、第 3 項が 0 となるので、



$$x(\gamma\to\infty)=1-e^{-\frac{1}{2\gamma}t}\to 1$$

(ii) $\gamma=1$ のとき、

$$\lambda=-1$$

この基本解は、$X_1=e^{-t},X_2=te^{-t}$ となる。よって、与式の一般解は

$$x=\underline{1+C_1e^{-t}+C_2te^{-t}}$$

となる。初期条件 $x(0)=\dot{x}(0)=0$ より

$$0=1+C_1$$

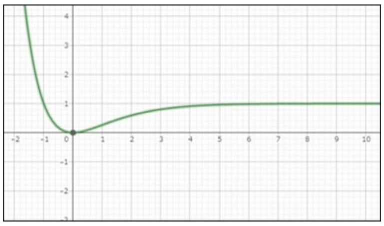
$$0=-C_1+C_2$$

よって、

$$C_1 = -1, \qquad C_2 = -1$$

となるので、

$x = \underline{1 - e^{-t} - te^{-t}}$



が得られる。

(iii) $1 > \gamma > 0$ のとき、

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{1-\gamma^2}i$$

この基本解は、$X_1 = e^{-\gamma t}\cos\sqrt{1-\gamma^2}t, X_2 = e^{-\gamma t}\sin\sqrt{1-\gamma^2}t$ となる。よって、与式の一般解は

$$x = \underline{1 + e^{-\gamma t}\left(C_1\cos\sqrt{1-\gamma^2}t + C_2\sin\sqrt{1-\gamma^2}t\right)}$$

となる。初期条件 $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ より

$$0 = 1 + C_1$$
$$0 = -\gamma C_1 + \sqrt{1-\gamma^2}C_2$$

よって、

$$C_1 = -1, \qquad C_2 = -\frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}}$$

となるので、

$$x = 1 - e^{-\gamma t}\left(\cos\sqrt{1-\gamma^2}t + \frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}}\sin\sqrt{1-\gamma^2}t\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}}e^{-\gamma t}\left(\cos\sqrt{1-\gamma^2}t - \delta\right) \qquad \text{ただし、} \cos\delta = \sqrt{1-\gamma^2}$$

が得られる。$\gamma \to 0$ とすると、

$$x(\gamma \to 0) = 1 - \cos t$$

となる。これは 1 周りの単振動である。すなわち、摩擦がなければ永久にグルグル回ることになる。