第７回　多変数関数の積分（3）

今回のポイント

多重積分の応用
1. 体積
2. 曲面積

5.4 重積分の応用

重積分を用いた立体の体積や曲面の面積を求める方法を学ぶ。

平面図形の面積

例 11

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ で囲まれる図形の面積を求める

$x = ar\cos\theta$, $y = br\sin\theta$ とおくと、$0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$ で、

$$|J| = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = |abr\cos^2\theta + abr\sin^2\theta| = |abr| = abr$$

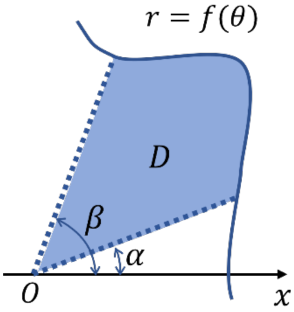
であるから、

$$|D| = \iint_D dxdy = ab\int_0^1 r\,dr\int_0^{2\pi} d\theta = \underline{\pi ab}$$

となる。

例 12

極座標で表された曲線 $r = f(\theta)$ と半直線 $(\theta = \alpha, \theta = \beta)$ で囲まれた右のような図形 D の面積を求める



$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくと、$0 \le r \le f(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$

あるから、

$$|D| = \iint_D dxdy = \int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{f(\theta)} r\,dr = \underline{\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \{f(\theta)\}^2\,d\theta}$$

となる。

立体の体積

例 13

次の立体の体積を求めよ。

(1)　球 $x^2+y^2+z^2\le a^2$　$(a>0)$

$D=\{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2\le a^2\}$ に対して

$x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\theta$ と極座標変換すると、xyz空間の領域Dと$r\theta\varphi$空間の領域$E=\{(r,\theta,\varphi)|\ 0\le r\le a,\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi\}$と対応する。

$$|D|=\iiint_D dxdydz=\iiint_E r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi=\int_0^a r^2\,dr\int_0^\pi\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi$$

$$=2\pi\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a[-\cos\theta]_0^\pi=\underline{\frac{4}{3}\pi a^3}$$

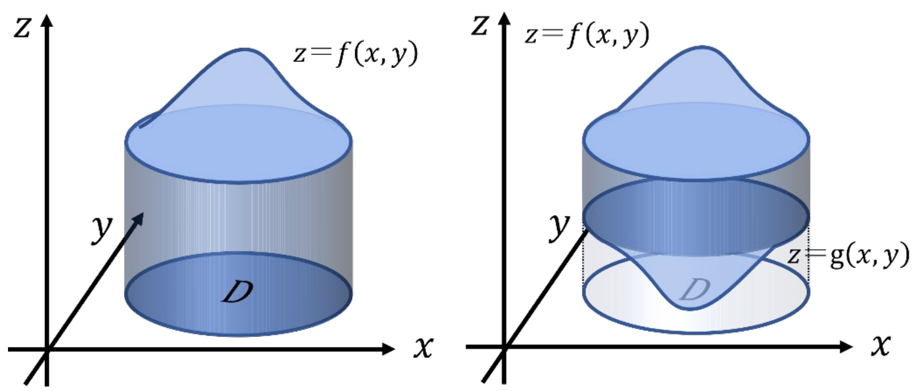
(2)　楕円体 D: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$

$D=\left\{(x,y,z)|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\right\}$ に対して

$x=au,\ y=bv, z=cw$ と変換すると、xyz空間の領域Dとuvw空間の領域$E=\{(u,v,w)|\ u^2+v^2+w^2\le 1^2\}$と対応し、$J=abc$である。(1)を用いれば、

$$|D|=\underline{\frac{4}{3}\pi abc}$$

柱状の立体Kの体積V

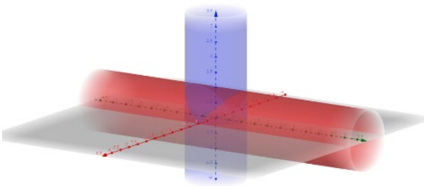


K: $0\le z\le f(x,y)$, $(x,y)\in D$　　　K: $g(x,y)\le z\le f(x,y)$, $(x,y)\in D$

$V=\iint_D f(x,y)\,dxdy$　　　$V=\iint_D\{f(x,y)-g(x,y)\}\,dxdy$

立体の体積を求めるときは対称性に注意して、+（プラス）になる部分の何倍になるかを考える

例 14



2 つの円柱$x^2+y^2 \le a^2$, $x^2+z^2 \le a^2$ の共通部分の体積 Vを求めよ。

$x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$ の部分のみの体積を求めて 8 倍する。

$x^2+z^2 \le a^2$から$z=\sqrt{a^2-x^2}$ として、これを$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \le a^2,\ x \ge 0, y \ge 0\}$においで積分すればいいので、

$$V = 8\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2}\,dy$$

$$= 8\int_0^a (a^2-x^2)\,dx = \underline{\frac{16}{3}a^3}$$

例 15

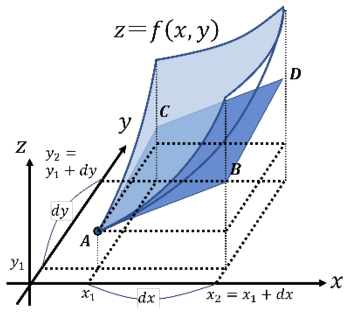
$D=\{(x,y)\,|\,a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$を$x$ 軸のまわりに回転した回転体の体積Vを求めよ。

$y \ge 0, z \ge 0$ の部分のみの体積を求めて 4 倍する。

$$V = 4\iint_D \sqrt{f(x)^2-y^2}\,dxdy$$

$$= 4\int_a^b dx \int_0^{f(x)} \sqrt{f(x)^2-y^2}\,dy = \underline{\pi\int_a^b f(x)^2\,dx}$$

➢ 曲面積



曲面の面積を求める。

x軸方向にdx, y軸方向にdyだけ変化した領域Dにおける$z=f(x,y)$がつくる曲面積を考える。$A(x_1,y_1,z_1)$での接平面$ABCD$の面積を求め、$dx \to 0, dy \to 0$ とすればよい。

BおよびCの座標はAでの偏微分を用いて次のように表される

$$B:(x_2,y_1,z_2) = \left(x_1+dx,\ \ y_1,\ \ z_1+\frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx\right)$$

$$C:(x_1,y_2,z_3) = \left(x_1,\ \ y_1+dy,\ \ z_1+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy\right)$$

$\angle BAC$をθとおくと平行四辺形$ABCD$の面積ΔSは

$$\Delta S = AB \times AC \times \sin\theta$$

$$= AB \times AC \times \sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$= \sqrt{(AB \times AC)^2 - (AB \times AC \times \cos\theta)^2}$$

ここで前半部分は

AB と AC の内積

$$(AB \times AC)^2 = \left\{(x_2 - x_1)^2 + 0^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx\right)^2\right\} \times \left\{0^2 + (y_2 - y_1)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy\right)^2\right\}$$
$$= \left\{(dx)^2 + 0^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx\right)^2\right\} \times \left\{0^2 + (dy)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy\right)^2\right\}$$
$$= (dx)^2(dy)^2\left\{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right\}$$

後半は

$$(AB \times AC \times \cos\theta)^2 = \left\{(x_2 - x_1)(x_1 - x_1) + (y_2 - x_1)(y_1 - y_1) + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy\right)\right\}^2$$
$$= (dx)^2(dy)^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

よって、

$$\Delta S = dxdy\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

これをx軸方向、y軸方向それぞれについて重積分すればよい。

定理 13　曲面積

$f(x, y)$がDでC^1級ならば、曲面$z = f(x, y)$は曲面積Sをもち

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2}\, dxdy$$

例 16

放物面$z = x^2 + y^2$ の $z \leq a$ ($a > 0$) の部分の表面積Sをもとめよ

$D = \{(x, y, z) |\ x^2 + y^2 \leq a^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ として、4 倍する。$x = r\cos\theta$, $= r\sin\theta$と極座標変換すると

$$S = 4\iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\, dxdy$$
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{a}} r\sqrt{1 + 4r^2}\, dr$$
$$= 2\pi\left[\frac{(1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}}}{12}\right]_0^{\sqrt{a}} = \underline{\frac{(1 + 4a)^{\frac{3}{2}} - 1}{6}\pi}$$

$y=f(x)$を$a\le x\le b$の範囲でx 軸のまわりに回転した回転体の表面積を求めよう。

回転体の $z\ge 0$ の部分は、$D=\{(x,y,z)|\ a\le x\le b,\ -|f(x)|\le y\le |f(x)|\}$上の面積 $z=\sqrt{f(x)^2-y^2}$である。

$$\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}=\sqrt{1+\left(\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{f(x)^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{f(x)^2-y^2}}\right)^2}$$

$$=|f(x)|\frac{\sqrt{1+f'(x)^2}}{\sqrt{f(x)^2-y^2}}$$

となるので、

$$S=2\iint_D\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}\,dxdy=2\iint_D|f(x)|\frac{\sqrt{1+f'(x)^2}}{\sqrt{f(x)^2-y^2}}dxdy$$

$$=4\int_a^b|f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx\int_0^{|f(x)|}\frac{dy}{\sqrt{f(x)^2-y^2}}$$

$$=4\int_a^b|f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}\left[\sin^{-1}\frac{y}{|f(x)|}\right]_0^{|f(x)|}dx$$

$$=\underline{2\pi\int_a^b|f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}$$

例 17

半径a の球の表面積Sをもとめよ

$y=f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$ $(-a\le x\le a)$ をx 軸周りに回転させると、

$$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

より、

$$\sqrt{1+f'(x)^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

となるので、

$$S=2\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=2\pi a\int_{-a}^{a}dx=4\pi a^2$$

例題 6

サイクロイド$x=a(\theta-\sin\theta), y=a(1-\cos\theta)$ $(a>0,\ 0\le\theta\le 2\pi)$ をx 軸のまわりに回転した回転体の表面積を求めよ。

$$S=4\pi\int_0^{\pi a}y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$= 4\pi\int_0^\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy/_{d\theta}}{dx/_{d\theta}}\right)^2}\,\frac{dx}{d\theta}d\theta$$

$$= 4\pi\int_0^\pi a(1-\cos\theta)\sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2+(a\sin\theta)^2}\,d\theta$$

$$= 4\pi a^2\int_0^\pi (1-\cos\theta)\sqrt{(1-\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}\,d\theta$$

$$= 8\pi a^2\int_0^\pi (1-\cos\theta)\sin\frac{\theta}{2}d\theta = 16\pi a^2\int_0^\pi \sin^3\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$= 32\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\,dt = 32\pi a^2\cdot\frac{2}{3} = \underline{\frac{64}{3}\pi a^2}$$

【問題集】

立体の体積

次の立体の体積を求めよ。

(1) 3重積分を用いて、半径1の球

(2) 楕円体 $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}\leq 1$

(3) 曲面 $z=4-x^2-y^2$ とxy 平面で囲まれた立体

(4) 球$x^2+y^2+z^2\leq 9$ と円柱 $x^2+y^2\leq 4$ で平面で囲まれた立体

(5) 円柱 $x^2+y^2\leq a^2\ (a>0)$ のxy 平面の上方、平面$z=x$ の下方にある部分の立体

(6) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}\leq a^{\frac{2}{3}}\ (a>0)$で囲まれた部分

(7) 曲面$z=xy\ (x\geq 0,\ y\geq 0)$ と円柱 $x^2+y^2=a^2$ および xy 平面 で囲まれた立体

(8) 円柱 $x^2+y^2\leq 1$ と球 $x^2+y^2+z^2\leq 4$ の共通部分

(9) 球 $x^2+y^2+z^2\leq a^2\ (a>0)$の内部にある円柱 $x^2+y^2\leq ax$ の共通部分

(10) 曲面 $z=1-x^2-y^2$ とxy 平面で囲まれた立体

(11) 円柱 $x^2+y^2=1$ と2つの平面$z=0, z=x+1$ で囲まれた立体

(12) $z=xy$, 円柱 面$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ と xy 平面で囲まれた部分

(13) $\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}+\sqrt{|z|}=1$ と座標平面で囲まれた部分

(14) $x^2+y^2+z^2\leq 4$ かつ $(x-1)^2+y^2\leq 1$ の共通部分

(15) $z\leq 4-x^2-y^2$ かつ $0\leq z$ と、$x^2+(y-1)^2\leq 1$ の共通部分

次の回転体の体積を求めよ。

(1) 球$x^2+y^2+z^2 \leq 4$を平面$x=1$で切り取ったときの$x \geq 1$の部分

(2) 曲面$x=y^2+z^2$と平面$x=a\ (z>0)$で囲まれた立体

➢ 曲面積

次の図形の表面積を求めよ。

(1) 平面$x+y+z=1$の$x,y,z \geq 0$の部分の面積

(2) 球面$x^2+y^2+z^2=a^2\ \ (a>0)$のうちで

$x_0 \leq x \leq x_0+h\ \ (-a \leq x_0 \leq x_0+h \leq a)$の部分の面積（球帯の表面積）

(3) 円柱面$x^2+y^2=a^2\ \ (a>0)$の内部にある円柱面$x^2+z^2=a^2$の表面積

(4) 球面$x^2+y^2+z^2=9$が円柱面$x^2+y^2=4$によって切り取られる部分の面積

(5) $y=\sin x\ \ (0 \leq x \leq \pi)$を$x$軸の周りに回転してできる回転体の表面積

(6) 錐体$x^2+y^2=z^2\ \ (z \geq 0)$が球面$x^2+y^2+z^2=a^2$

によって切り取られる部分の面積

(7) 楕円$x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$をx軸の周りに回転してできる回転体の表面積

(8) アステロイド$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\ (a>0)$を$x$軸の周りに回転してできる回転体の表面積

(9) 曲面$z=3-x^2-y^2\ \ (z \geq 0)$の面積

(10) 曲面$z=xy\ \ \left(x^2+y^2 \leq 1\right)$の面積

(11) 曲面$z=\sqrt{4-x^2-y^2}\ \ \left(z \geq \sqrt{2}\right)$の面積

(12) 曲面$z=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}\ \ (0 \leq x \leq 1,\ \ 0 \leq y \leq 1)$の面積

【解答】

➢ 立体の体積

教科書演習 P.165 例題 5.13

(1) 3重積分を用いて、半径1の球の体積を求めよ。

$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1\}$とおく。求める体積$V$は

$$V=\iiint_D dxdydz$$

$x=r\sin\theta\cos\varphi\,, y=r\sin\theta\sin\varphi\,, z=\cos\theta$ とおくと、
$r\theta\varphi$平面の有界閉領域$E_n=\{(x,y)\,|\,0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi\}$と$xy$平面の有界閉領域$D$が対応する。$J=r^2$ より

$$V=\iiint_D dxdydz=\int_0^1 r^2\,dr\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{1}{3}\cdot 2\cdot 2\pi=\underline{\frac{4}{3}\pi}$$

(2) 楕円体 $x^2+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}\le 1$ の体積を求めよ。

$x=u, y=2v, z=3w$ とおくと $D=\{(u,v,w)\,|\,u+v^2+w^2\le 1\}$となり、

$$J=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{vmatrix}=6$$

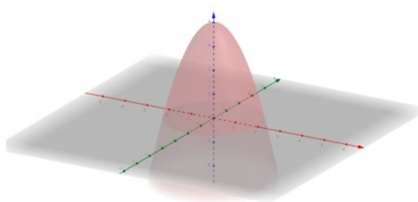
となるので、求める体積Vは

$$V=\iiint_D dxdydz=6\iiint_D dudvdw=6\cdot\frac{4}{3}\pi=\underline{8\pi}$$

教科書 P.171 問 16（演習に出題）

次の立体の体積を求めよ。

(3) 曲面 $z=4-x^2-y^2$ とxy 平面で囲まれた立体



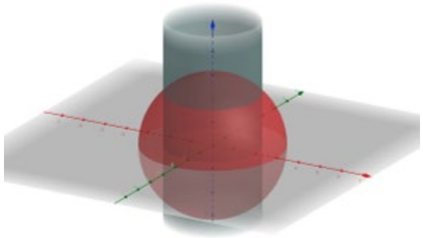
$z=0$ とすると$x^2+y^2=4$ であるから、
$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$とおく。
領域Dにおける点(x,y)において$4-x^2-y^2\ge 0$ であるから、求める体積Vは

$$V=\iint_D 4-x^2-y^2\,dxdy$$

$x=r\cos\theta\,, y=r\sin\theta$ と変換すると、$E=\{(r,\theta)\,|\,0\le r\le 2,\ 0\le\theta\le 2\pi\,\}, J=r$ より

$$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(4r-r^3)\,dr=\underline{8\pi}$$

(4)　球$x^2+y^2+z^2\leq 9$と円柱$x^2+y^2\leq 4$で平面で囲まれた立体



$D=\{(x,y)|\, x^2+y^2\leq 4,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$とおく。
求める体積Vは

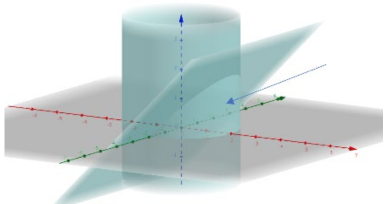
$$V=8\iint_D \sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy$$

$x=r\cos\theta\,, y=r\sin\theta$ と変換すると、$E=$

$\left\{(r,\theta)|\, 0\leq r\leq 2,\ \ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right\}, J=r$ より

$$V=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^2\sqrt{9-r^2}\,rdr=4\pi\left[-\frac{1}{3}(9-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2=\underline{4\pi\left(9-\frac{5\sqrt{5}}{3}\right)}$$

(5)　円柱$x^2+y^2\leq a^2$ $(a>0)$ のxy平面の上方、平面$z=x$ の下方にある部分の立体



$D=\{(x,y)|\, x^2+y^2\leq a^2,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$とおく。
求める体積Vは

$$V=2\iint_D x\,dxdy$$

$x=r\cos\theta\,, y=r\sin\theta$ と変換すると、$E=\left\{(r,\theta)|\, 0\leq r\leq a,\ \ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right\}, J=r$ より

$$V=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a r\cos\theta\, rdr=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\, d\theta\int_0^a r^2\,dr=\underline{\frac{2}{3}a^3}$$

教科書 P.177 演習問題 5-A 8（レポートに出題）

次の立体の体積を求めよ。

(6)　$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}\leq a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$で囲まれた部分

対称なので、$x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$ の部分を計算して 8 倍する。z について解くと

$$z=\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$D=\left\{(x,y)|\, 0\leq x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\leq a^{\frac{2}{3}},\ x\geq 0,\ y\geq 0\right\}$とおくと、求める体積$V$は

$$V=8\iint_D dxdy\int_0 dz=8\iint_D\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}dxdy$$

ここで、$x=ar^3\cos^3\theta\,,\ y=ar^3\sin^3\theta$ とおくと、

$$J = \begin{vmatrix} 3ar^2\cos^3\theta & -3ar^3\cos^2\theta\sin\theta \\ 3ar^2\sin^3\theta & 3ar^3\sin^2\theta\cos\theta \end{vmatrix} = 9a^2r^5\cos^2\theta\sin^2\theta$$

$$\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = a(1-r^2)^{\frac{3}{2}}$$

となるので、

$$V = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 a(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\cdot 9a^2r^5\cos^2\theta\sin^2\theta\ drd\theta$$
$$= 72a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta\int_0^1 r^5(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\ dr$$

θについての積分は、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta\,d\theta = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4\theta)\,d\theta = \frac{1}{8}\left[\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{1}{8}\left\{\left(\frac{\pi}{2}-0\right) - (0-0)\right\} = \frac{\pi}{16}$$

rについての積分は、$r = \sin\varphi$ とおくと$dr = \cos\varphi\,d\varphi$

$$\int_0^1 r^5(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\,dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi\cos^4\varphi\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,(1-\cos^2\varphi)^2\cos^4\varphi\,d\varphi$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)'\{\cos^8\varphi - 2\cos^6\varphi + \cos^4\varphi\}\,d\varphi = -\left[\frac{\cos^9\varphi}{9} - \frac{2\cos^7\varphi}{7} + \frac{\cos^5\varphi}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\left\{(0-0+0) - \left(\frac{1}{9} - \frac{2}{7} + \frac{1}{5}\right)\right\} = \frac{8}{5\cdot 7\cdot 9}$$

以上より、

$$V = 72a^3\cdot\frac{\pi}{16}\cdot\frac{8}{5\cdot 7\cdot 9} = \underline{\frac{4}{35}\pi a^3}$$

(7)　曲面$z = xy$ $(x \geq 0,\ y \geq 0)$ と円柱 $x^2 + y^2 = a^2$ および xy 平面 で囲まれた立体

$D = \{(x,y) |\ x^2 + y^2 \leq a^2\}$とおく。
求める体積Vは

$$V = \iint_D xy\ dxdy = \int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} xy\,dy$$

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と変換すると、$E = \{(r,\theta) |\ 0 \leq r \leq a,\ \ 0 \leq \theta \leq \pi\}$, $J = r$ より

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a r^3\sin\theta\cos\theta\,dr = \frac{a^4}{4}\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\frac{a^4}{8}}$$

(8)　円柱 $x^2 + y^2 \leq 1$ と球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ の共通部分

$D = \{(x,y) | \, x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$とおく。
求める体積Vは

$$V = 8 \iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dxdy$$

$x = r\cos\theta\,, y = r\sin\theta$ と変換すると、$E = \left\{(r,\theta) | \, 0 \leq r \leq 2,\ \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}, J = r$ より

$$V = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \sqrt{4 - r^2}\, r dr = 4\pi \left[-\frac{1}{3}(4 - r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \underline{\frac{4\left(8 - 3\sqrt{3}\right)\pi}{3}}$$

(9)　球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ $(a > 0)$の内部にある円柱 $x^2 + y^2 \leq ax$ の共通部分

$D = \{(x,y) | \, x^2 + y^2 \leq ax\}$とおく。
求める体積Vは

$$V = 2 \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dxdy$$

$x = ar\cos\theta\,, y = ar\sin\theta$ と変換すると、$E = \left\{(r,\theta) | \, 0 \leq r \leq a\cos\theta\,,\ \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\} J =$

$a^2 r$ より

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \sqrt{a^2 - r^2}\, r dr = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left[-\frac{1}{3}(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{a\cos\theta}$$

$$= \frac{4a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\theta)\, d\theta = \underline{\frac{4a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)}$$

教科書演習 P.166 例題 5.14

次の立体の体積を求めよ。

(10)　曲面 $z = 1 - x^2 - y^2$ とxy 平面で囲まれた立体

$z = 0$ とすると$x^2 + y^2 = 1$ であるから、$D = \{(x,y) | \, x^2 + y^2 \leq 1\}$とおく。
領域Dにおける点(x,y)において$1 - x^2 - y^2 \geq 0$ であるから、求める体積Vは

$$V = \iint_D 1 - x^2 - y^2\, dxdy$$

$x = r\cos\theta\,, y = r\sin\theta$ と変換すると、$E = \{(r,\theta) | \, 0 \leq r \leq 1,\ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}, J = r$ より

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r - r^3)\, dr = \underline{\frac{\pi}{2}}$$

(11)　円柱 $x^2 + y^2 = 1$ と2つの平面$z = 0, z = x + 1$ で囲まれた立体

$D=\{(x,y)|\ x^2+y^2\leq 1\}$とおく。
求める体積Vは

$$V=\iint_D (x+1)\,dx$$

$x=r\cos\theta\,,y=r\sin\theta$ と変換すると、$E=\{(r,\theta)|\,0\leq r\leq 1,\ \ 0\leq\theta\leq 2\pi\,\},J=r$ より

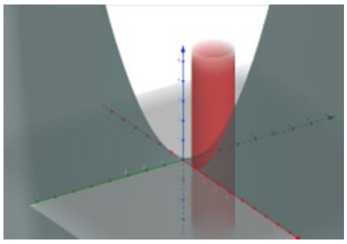
$$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(r^2\cos\theta+r)\,dr=\int_0^{2\pi}d\theta\left[\frac{r^3}{3}\cos\theta+\frac{r^2}{2}\right]_0^1$$

$$=\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{3}\cos\theta+\frac{1}{2}\right\}d\theta=\left[\frac{1}{3}\sin\theta+\frac{1}{2}\theta\right]_0^{2\pi}=\underline{\pi}$$

教科書演習 P.170 演習問題 5-A 7

次の立体の体積を求めよ。

(12) $z=xy$, 円柱 面$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ と xy 平面で囲まれた部分



$u=x-1,\ v=y-1$ とおくと、
$D=\{(x,y)|\,x^2+y^2\leq 1,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$となり、
求める体積Vは

$$V=\iint_D (u+1)(v+1)\,1\,dudv$$

$u=r\cos\theta\,,v=r\sin\theta$ と変換すると、$E=\{(r,\theta)|\,0\leq r\leq 1,\ \ 0\leq\theta\leq 2\pi\,\},J=r$ より

$$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(r\cos\theta+1)(r\sin\theta+1)\,rdr$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\left[\frac{r^4}{4}\cos\theta\sin\theta+\frac{r^3}{3}(\cos\theta+\sin\theta)+\frac{r^2}{2}\right]_0^1$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}\cos\theta\sin\theta+\frac{1}{3}(\cos\theta+\sin\theta)+\frac{1}{2}\right)d\theta$$

$$=\left[\frac{1}{8}\sin^2\theta+\frac{1}{3}(\sin\theta-\cos\theta)+\frac{1}{2}\theta\right]_0^{2\pi}=\underline{\pi}$$

(13) $\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}+\sqrt{|z|}=1$ と座標平面で囲まれた部分

$x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$に関して考えて、8 倍する。
求める体積Vは

$$V=8\int_0^1dx\int_0^{(1-\sqrt{x})^2}dy\int_0^{(1-\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}dz=8\int_0^1dx\int_0^{(1-\sqrt{x})^2}\left(1-\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2dy$$

$$=8\int_0^1dx\int_0^{(1-\sqrt{x})^2}\left\{\left(1-\sqrt{x}\right)^2-2\left(1-\sqrt{x}\right)\sqrt{y}+y\right\}dy$$

$$= 8\int_0^1 dx\left[\left(1-\sqrt{x}\right)^2 y - 2\left(1-\sqrt{x}\right)\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + \frac{y^2}{2}\right]_0^{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^1 \left(1-\sqrt{x}\right)^4 dx = \frac{4}{3}\int_0^1 \left(1 - 4\sqrt{x} + 6x - 4x\sqrt{x} + x^2\right) dx$$

$$= \frac{4}{3}\left[x - \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3x^2 - \frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \underline{\frac{4}{45}}$$

キャンパス･ゼミ 微分積分 P.220 演習問題 30

(14) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ かつ $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ の共通部分の体積 V を求めよ

この問題は、

$$\iiint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dxdydz \quad D = \{(x,y,z) |\, x^2 + y^2 \leq 2x, \quad -1 \leq z \leq 1\}$$

と書き換えることができる。

$x = r\cos\theta\,, y = r\sin\theta\,, z = z$ とおくと、

$r\theta$平面の有界閉領域$E = \left\{(x,y) |\, 0 \leq r \leq 2\cos\theta\,, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ -1 \leq z \leq 1\right\}$と$xy$平面の有界閉領域$D$が対応する。

$$\iiint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dxdydz = 2\iint_E \sqrt{4 - r^2} \cdot rdrd\theta = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r\sqrt{4 - r^2}\, dr$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left[-\frac{1}{3}(4 - r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2\cos\theta} = \frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{4 - 4|\sin\theta|^3\}\, d\theta = \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{1 - \sin^3\theta\}\, d\theta$$

$$= \frac{16}{3}\left\{\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right\} = \underline{\frac{8(3\pi - 4)}{9}}$$

キャンパス･ゼミ 微分積分 P.222 演習問題 31

(15) $z \leq 4 - x^2 - y^2$ かつ $0 \leq z$ と、$x^2 + (y-1)^2 \leq 1$ の共通部分の体積 V を求めよ

この問題は、

$$\iiint_D (4 - x^2 - y^2)\, dxdydz \quad D = \{(x,y,z) |\, x^2 + y^2 \leq 2y, \quad -1 \leq z \leq 1\}$$

と書き換えることができる。

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$ とおくと、
$r\theta$平面の有界閉領域$E = \{(x,y)|\, 0 \le r \le 2\sin\theta, 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le z \le 1\}$と$xy$平面の有界閉領域$D$が対応する。

$$\iiint_D (4 - x^2 - y^2)\,dxdydz = \iint_E (4 - r^2)\cdot rdrd\theta = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\sin\theta} (4r - r^3)\,dr$$
$$= \int_0^{\pi} d\theta \left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^{2\sin\theta} = \int_0^{\pi} \{8\sin^2\theta - 4\sin^4\theta\}\,d\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{2\sin^2\theta - \sin^4\theta\}\,d\theta$$
$$= 8\left\{2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right\} = \underline{\frac{5\pi}{2}}$$

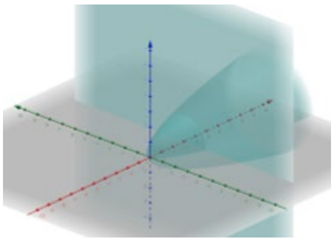
教科書 P.171 問 17 (演習に出題)
次の回転体の体積を求めよ。

(1) 球$x^2 + y^2 + z^2 \le 4$ を平面 $x = 1$ で切り取ったときの $x \ge 1$ の部分

$D = \left\{(x,y)|\, 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \sqrt{2 - x^2}\right\}$とおく。
求める体積Vは

$$V = \pi\int_1^2 (4 - x^2)\,dx = \pi\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \underline{\frac{5}{3}\pi}$$

(2) 曲面$x = y^2 + z^2$ と平面 $x = a$ $(z > 0)$ で囲まれた立体



$D = \left\{(x,y)|\, 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le \sqrt{x}\right\}$とおく。
求める体積Vは

$$V = \pi\int_0^a x\,dx = \pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \underline{\frac{a^2}{2}\pi}$$

➢ 曲面積

教科書 P.175 問 18 (レポートに出題)
次の図形の表面積を求めよ。

(1) 平面$x + y + z = 1$ の $x, y, z \ge 0$ の部分の面積

$D = \{(x,y)|\, x + y \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$とする。
$x + y + z = 1$ は変形すると $z = 1 - x - y$ であり、$z_x = -1,\ z_y = -1$ であるから、
求める曲面積Sは

$$S = \iint_D \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1}\,dxdy = \iint_D \sqrt{3}\,dxdy$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy = \sqrt{3}\int_0^1 (1-x)\,dx$$

$$= \sqrt{3}\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

(2) 球面 $\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 = a^2}$ $(\boldsymbol{a > 0})$ のうちで

$\boldsymbol{x_0 \le x \le x_0 + h}$ $(\boldsymbol{-a \le x_0 \le x_0 + h \le a})$ の部分の面積（球帯の表面積）

$D = \{(x,y) |\, x^2 + y^2 \le a^2,\ x_0 \le x \le x_0 + h\}$とする。$y \ge 0, z \ge 0$について計算して 4 倍する

$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ であり、

$$z_x = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \qquad z_y = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

であるから、

求める曲面積Sは

$$S = 4\iint_D \sqrt{\left(-\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(-\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + 1}\,dxdy$$

$$= 4\iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}dxdy$$

$$= 4a\int_{x_0}^{x_0+h} dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}dy = 4a\int_{x_0}^{x_0+h} dx \left[\sin^{-1}\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= 2\pi a\int_{x_0}^{x_0+h} dx = \underline{2\pi a h}$$

(3) 円柱面 $\boldsymbol{x^2 + y^2 = a^2}$ $(\boldsymbol{a > 0})$ の内部にある円柱面 $\boldsymbol{x^2 + z^2 = a^2}$の表面積

$D = \{(x,y) |\, x^2 + y^2 \le a^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\}$として計算して 8 倍する

$z = \sqrt{a^2 - x^2}$ であり、

$$z_x = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \qquad z_y = 0$$

であるから、

求める曲面積Sは

$$S = 8\iint_D \sqrt{\left(-\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)^2 + 0^2 + 1}\,dxdy = 8\iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}dxdy$$

$$= 8a\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dy = \underline{8a^2}$$

(4) 球面 $x^2+y^2+z^2=9$ が円柱面 $x^2+y^2=4$ によって切り取られる部分の面積

$D=\{(x,y)|\ x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\}$として計算して 8 倍する

$z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ であり、

$$z_x=-\frac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}},\qquad z_y=-\frac{y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$$

であるから、

求める曲面積Sは

$$S=8\iint_D\sqrt{\left(-\frac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\right)^2+\left(-\frac{y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\right)^2+1}\,dxdy$$

$$=24\iint_D\frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}dxdy$$

ここで$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$とおくと、

$r\theta$平面の有界閉領域$E=\left\{(x,y)|\ 0\le r\le 2, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$と$xy$平面の有界閉領域$D$が対応する。

$$S=24\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^2\frac{r}{\sqrt{9-r^2}}dr=12\pi\left[-\sqrt{9-r^2}\right]_0^2$$

$$=\underline{12\pi\left(3-\sqrt{5}\right)}$$

(5) $y=\ \sin x\ (0\le x\le\pi)$を x 軸の周りに回転してできる回転体の表面積

$D=\left\{(x,y)|\ 0\le x\le\frac{\pi}{2},\ \ 0\le y\le\sin x\right\}$として計算して 2 倍する

$y=\sin x$ で $y'=\cos x$ であるから

求める曲面積Sは

$$S=2\cdot 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$$

ここで$\cos x=t$とおくと、$-\sin x\,dx=dt$ となる。積分部分は、

$$\int_0^1\sqrt{1+t^2}\,dt=\left[t\sqrt{1+t^2}\right]_0^1-\int_0^1 t\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt$$

$$=\left[t\sqrt{1+t^2}\right]_0^1-\int_0^1\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt$$

$$=\left[t\sqrt{1+t^2}\right]_0^1-\int_0^1\frac{1+t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt+\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$$

$$= \left[t\sqrt{1+t^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\,dt + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$$

よって、

$$\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\left\{\left[t\sqrt{1+t^2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[t\sqrt{1+t^2} + \log\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|\right]_0^1 = \frac{1}{2}\{\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2})\}$$

以上より、

$$S = 4\pi \cdot \frac{1}{2}\{\sqrt{2} - \log(1+\sqrt{2})\} = \underline{2\pi\{\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2})\}}$$

教科書 P.177 演習問題 5-A. 9.

(6)　錐体 $x^2 + y^2 = z^2$ $(z \geq 0)$が球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

によって切り取られる部分の面積

$z = \sqrt{x^2+y^2}$ であり、

$$z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

であるから、
求める曲面積Sは

$$S = \frac{1}{2}\iint_D \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + 1}\,dxdy$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\iint_D dxdy$$

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$とおくと、$r\theta$平面の有界閉領域$E = \{(x,y) \mid 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$と$xy$平面の有界閉領域$D$が対応する。

$$S = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r\,dr = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\pi \cdot \frac{a^2}{2} = \underline{\frac{\sqrt{2}}{2}a^2\pi}$$

(7)　楕円 $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ を x 軸の周りに回転してできる回転体の表面積

$D = \left\{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{2-2x^2}\right\}$として計算して 2 倍する
$y = \sqrt{2}\sqrt{1-x^2}$より

$$y' = \sqrt{2}\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

求める曲面積Sは

$$S = 4\pi \int_0^1 \sqrt{2}\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\frac{2x^2}{1-x^2}}\,dx = 4\sqrt{2}\pi \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$$

積分部分は、

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dt = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+x^2} + \log\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{2} + \log\left(1+\sqrt{2}\right)\right\}$$

であるから、

$$S = 4\sqrt{2}\pi \cdot \frac{1}{2}\left\{\sqrt{2} + \log\left(1+\sqrt{2}\right)\right\} = \underline{2\left\{2+\sqrt{2}\log\left(1+\sqrt{2}\right)\right\}\pi}$$

(8)　アステロイド $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ $(a > 0)$を x 軸の周りに回転してできる回転体の表面積

$x = a\cos^3\theta$，$y = a\sin^3\theta$ とおく。対称性から$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$を考えて 4 倍する

$$\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2\theta\sin\theta\,, \qquad \frac{dy}{dt} = 3a\sin^2\theta\cos\theta,$$

より、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{-3a\cos^2\theta\sin\theta} = -\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

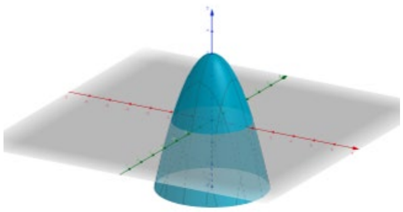
よって、求める曲面積Sは

$$S = 2\cdot 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3\theta \sqrt{1+\left(-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2}\left(-3a\cos^2\theta\sin\theta\right)d\theta$$

$$= -12a^2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta\cos\theta\,d\theta = 12a^2\pi\left[\frac{\sin^5\theta}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\frac{12}{5}a^2\pi}$$

キャンパス・ゼミ 微分積分 P.232 演習問題 33

(9)　曲面$z = 3 - x^2 - y^2$　$(z \ge 0)$ の面積



$z = 3 - x^2 - y^2$ は$z = 0$ のとき$x^2 + y^2 = 3$ であるから、
$D = \{(x,y) |\, x^2 + y^2 = 3\}$とする。
$z_x = -2x$，$z_y = -2y$ であるから、
求める曲面積Sは

$$S = \iint_D \sqrt{(-2x)^2 + (-2y)^2 + 1}\,dxdy = \iint_D \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\,dxdy$$

ここで$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$とおくと、
$E = \left\{(x, y) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{3},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}$と領域$D$が対応する。

$$S = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4r^2+1}\, r dr = 2\pi \left[\frac{1}{12}(4r^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{3}}$$
$$= \underline{\frac{\pi}{6}\left\{13^{\frac{3}{2}} - 1\right\}}$$

【別解】 z 軸の周りに回転してできる回転体の表面積として解く

yz平面（$x = 0$）において、$z = 3 - y^2$であるから

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{1}{2y}$$

求める曲面積Sは

$$S = 2\pi \int_0^3 y \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{2y}\right)^2}\, dz = 2\pi \int_0^3 \frac{\sqrt{4y^2+1}}{2} dz$$

$y^2 = 3 - z$ を代入すると、

$$S = \pi \int_0^3 \sqrt{13 - 4z}\, dz = -\frac{\pi}{6}\left[(13 - 4z^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = \underline{\frac{\pi}{6}\left\{13^{\frac{3}{2}} - 1\right\}}$$

キャンパス・ゼミ 微分積分 P.236 実践問題 33

(10) 曲面$z = xy$ $\left(x^2 + y^2 \leq 1\right)$の面積

$z_x = y,\ z_y = x$ であるから、
求める曲面積Sは

$$S = \iint_D \sqrt{y^2 + x^2 + 1}\, dxdy$$

ここで$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$とおくと、$E = \{(x, y) \mid 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$が対応する。

$$S = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\sqrt{r^2+1}\, r dr = 2\pi \left[\frac{1}{3}(r^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$
$$= \underline{\frac{2\left(2\sqrt{2} - 1\right)\pi}{3}}$$

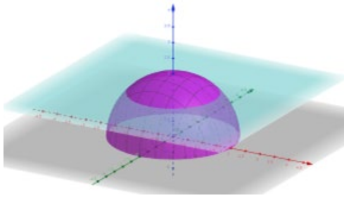
キャンパス・ゼミ 微分積分 P.237 演習問題 34

(11) 曲面$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ $\left(z \geq \sqrt{2}\right)$の面積

$z = \sqrt{2}$ とすると、$x^2 + y^2 = 2$ であるから、$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$ となる。

$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ より

$$z_x=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}},\qquad z_y=-\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$



であるから、
求める曲面積Sは

$$S=\iint_D\sqrt{\left(-\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)^2+\left(-\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)^2+1}\,dxdy$$

$$=\iint_D\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}dxdy$$

ここで$x=r\cos\theta\,,y=r\sin\theta$とおくと、$E=\left\{(x,y)|\,0\le r\le\sqrt{2},\ 0\le\theta\le 2\pi\right\}$が対応する。

$$S=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\frac{r}{\sqrt{4-r^2}}dr=4\pi\left[-\sqrt{4-r^2}\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$=\underline{4\pi\left(2-\sqrt{2}\right)}$$

キャンパス・ゼミ 微分積分 P.239 演習問題 35

(12) 曲面$z=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}$ $(0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1)$の面積

$$z_x=2\sqrt{x},\qquad z_y=2\sqrt{y}$$

であるから、求める曲面積Sは

$$S=\iint_D\sqrt{\left(2\sqrt{x}\right)^2+\left(2\sqrt{y}\right)^2+1}\,dxdy=\int_0^1dy\int_0^1\sqrt{4x+4y+1}\,dx$$

$$=\int_0^1dy\left[\frac{1}{6}(4x+4y+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{6}\int_0^1\left\{(4y+5)^{\frac{3}{2}}-(4y+1)^{\frac{3}{2}}\right\}dy$$

$$=\frac{1}{6}\left[\frac{1}{10}\left\{(4y+5)^{\frac{5}{2}}-(4y+1)^{\frac{5}{2}}\right\}\right]_0^1=\frac{1}{60}\left\{\left(3^5-5^{\frac{5}{2}}\right)-\left(5^{\frac{5}{2}}-1\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{60}\left(244-2\cdot 5^{\frac{5}{2}}\right)=\underline{\frac{1}{30}\left(122-5^{\frac{5}{2}}\right)}$$