第 8 回　無限級数（1）

今回のポイント

級数、特に正項級数の収束条件として以下の判定法を学ぶ
1. 積分判定法
2. 比較判定法
3. ダランベールの判定法
4. コーシーの判定法

第 6 章　級数

6.1 級数の収束・発散

これまでテイラー展開やマクローリン展開をすることで関数を簡素にして取り扱うことを学んできた。例えば、

$$e^x = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x^1 + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

などである。これらが物理現象を表すとき、これらが収束するのか発散するのか、収束の条件や発散の種類はどのようなものかという性質を調べることで、その物理現象の行き先を知ることができる。この章では、このような級数の収束と発散について見ていく

- **級数**

無限個の数列$\{a_n\}$にたいして、各項a_n を形式的に+でつないだもの

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

を（無限）級数という。級数の最初のn 個の項の和

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

を第n部分和という。

S_nがSに収束するとき（$S_n \to S \ (n \to \infty)$）、無限級数は収束してその和は$S$であるという。

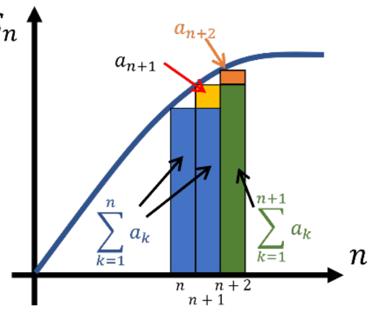
S_nがSに収束しないとき、無限級数は発散するという。

例 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n(n+1)}} = \mathbf{1}$$ **を確かめよ。**

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{n=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \ \ (n \to \infty)$$

<u>級数の基本性質</u>



(1)　　級数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$が収束すれば、

$\{a_n\}$は$\mathbf{0}$に収束する $(n \to \infty)$

(1')　　$\{a_n\}$が収束しなければ、

級数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$は発散する。（(1)の対偶）

(2)　　級数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$が収束すれば、

その線形結合 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$や定数倍 $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ も収束し、

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

(3)　　級数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に

有限個の項を足しても引いても、収束、発散は変わらない。

(4)　　級数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$が収束するとき、項の順序を換えずに、そのいくつかずつを括弧で括ってできる級数

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}) + \cdots + (a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}) + \cdots$$

も収束し、その和は変わらない。

例 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{ar^{n-1}} = \boldsymbol{a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{1} - \boldsymbol{r}} & (|\boldsymbol{r}| < \mathbf{1}) \\ \textbf{発散} & (|\boldsymbol{r}| \geq \mathbf{1}) \end{cases} \quad (\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0})$$

$|r| < 1$のとき、$r^n \to 0 \ \ (n \to \infty)$ なので、

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \to \frac{a}{1-r} \ \ (n \to \infty)$$

$|r| \geq 1$のとき、ar^{n-1}は発散するので、$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$も発散する。

問 2

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(n+1)(n+2)}$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}3\left\{\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right\}$$

$$=3\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)\to\underline{\frac{3}{2}\quad(n\to\infty)}$$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\to\underline{\frac{1}{4}\quad(n\to\infty)}$$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2^n}{5^n}$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k-2^k}{5^k}=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{3^k}{5^k}-\frac{2^k}{5^k}\right\}=\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^k-\left(\frac{2}{5}\right)^k\right\}$$

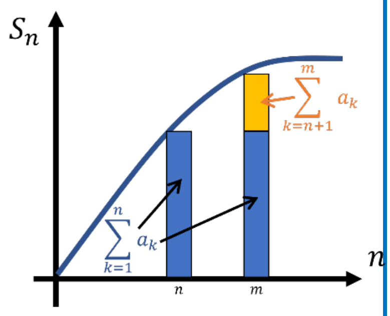
$$=\frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1-\frac{3}{5}}-\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{2}{5}}=\frac{5}{2}\left\{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}-\frac{5}{3}\left\{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}\to\underline{\frac{5}{6}\quad(n\to\infty)}$$

コーシーの定理（級数が収束するための必要十分条件）

級数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$が収束するためには

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k = \sum_{k=n+1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$= a_{n+1} + \cdots + a_m \quad \to \quad 0 \quad (m > n \to \quad \infty)$$



6.2 正項級数

$a_n \geq 0 \ (n = 1, 2, \cdots)$ であるとき、級数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を**正項級数**という。

定理3

正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は、部分和の$\{S_n\}$ が上に有界ならば収束する。

証明

$a_n \geq 0$ なので、

$$S_1 \leq S_2 \leq \cdots \leq S_{n-1} \leq S_n \leq \cdots$$

$\{S_n\}$ が上に有界であるとすると、$S_n \leq M$ となるM がある。よって、級数は収束する。

逆に正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束し、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ だとすると、

$$S_1 \leq S_2 \leq \cdots \leq S_{n-1} \leq S_n \leq \cdots \leq a$$

となる。よって、$\{S_n\}$ が上に有界である。

- **積分判定法**

定理 4（積分判定法）

$f(x)$ は$[1, \infty)$ で連続な減少関数で、$f(x) \geq 0$ とする。

$a_n = f(n) \quad (n = 1, 2, \cdots)$ とするとき、正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するためには、

無限積分$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ が存在することが必要十分である。

例題１

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$ **は $p > 1$ のとき収束し、$p \leq 1$ のとき発散することを示せ。**

$p \neq 1$ のとき、$f(x) = \frac{1}{x^p}$ とおくと、単調減少で$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$より、

$$\int_1^M f(x)\,dx = \int_1^M \frac{1}{x^p}\,dx = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_0^M = \frac{M^{1-p}-1}{1-p} \to \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} & (p>1) \\ \infty & (p<1) \end{cases} \quad (M\to\infty)$$

$p=1$ のとき

$$\int_1^M f(x)\,dx = \int_1^M \frac{1}{x}\,dx = [\log x]_1^M = \log M \to \infty \quad (M\to\infty)$$

以上より、$p>1$ のとき収束し、$p\leq 1$ のとき発散する。

$\boxed{\text{問 2}}$

$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^p}$ は $p>1$ のとき収束し、$p\leq 1$ のとき発散することを示せ。

$p>0$ のとき、$f(x)=\frac{1}{x(\log x)^p}$　$(x\geq 2)$　とおくと、$f(x)>0$ で

$$f'(x) = -\frac{\log x + p}{x^2(\log x)^{p+1}} < 0$$

であるから、$x\geq 2$ で、$f(x)$は単調減少で$f(x)>0$（積分判定法が使えるの意）

$$\int_2^M f(x)\,dx = \int_2^M \frac{1}{x(\log x)^p}\,dx = \int_2^M (\log x)'(\log x)^{-p}\,dx = \left[\frac{(\log x)^{-p+1}}{-p+1}\right]_2^M$$

$$= \frac{(\log M)^{-p+1}-(\log 2)^{-p+1}}{1-p} \to \begin{cases} \dfrac{(\log 2)^{-p+1}}{p-1} & (p>1) \\ \infty & (0<p<1) \end{cases} \quad (M\to\infty)$$

$p=1$ のとき

$$\int_2^M f(x)\,dx = \int_2^M \frac{1}{x\log x}\,dx = [\log(\log x)]_2^M = \log(\log M) - \log(\log 2) \to \infty \quad (M\to\infty)$$

$p\leq 0$ のとき

$$\frac{1}{n(\log n)^p} = \frac{(\log n)^{-p}}{n} \geq \frac{1}{n}$$

よって、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は前問より発散する。

以上より、与式は $p>1$ のとき収束し、$p\leq 1$ のとき発散する。

➢ 比例判定法

定理 5（比例判定法）

正項級数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$において

正の数 K があって、 $a_n \leq K b_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$ が成り立つとする。このとき、

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束すれば、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が発散すれば、 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ も発散する。

証明

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$の部分和をそれぞれ S_n, T_n とすると、仮定より

$$S_n \leq K T_n$$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束すれば、$\{T_n\}$は有界なので$\{S_n\}$も有界となり、定理3より$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。

(2)はその対偶

例 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 3n - 3}$$ **の収束・発散を調べよ。**

全ての n に対して、

$$\frac{n}{n^3 + 3n - 3} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

が成り立つ。例題 1 より $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は収束するから、与式は収束する。

系 （比例判定法）

正項級数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (b_n \neq 0)$において

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = l \quad (0 \leq l \leq \infty)$$

とする。

(1) $0 < l < \infty$ のとき、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ の収束、発散は同時に起こる。

(2) $l = 0$ のとき、$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束すれば、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する。

(3) $l = \infty$ のとき、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束すれば、$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ も収束する。

例 4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n - 4^n}$$ **の収束・発散を調べよ。**

$a_n = \dfrac{3^n}{5^n - 4^n}, \quad b_n = \dfrac{3^n}{5^n}$ とおくと、

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{5^n}{5^n - 4^n} = \frac{1}{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n}$ は収束するから、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n - 4^n}$ も収束する。

➢ ダランベールの判定式

定理 6（ダランベール（d'Alembert）の判定法）

正項級数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$において

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \qquad (0 \le r \le \infty)$$

であるとき、

(1)　$0 \le r < 1$ ならば、　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。

(2)　$1 < r \le \infty$ ならば、　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する。

証明

(1)　$r < R < 1$ であるR をとると、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < R \quad \text{すなわち} \quad a_{n+1} < Ra_n$$

このとき、

$$a_{n-1} < Ra_{n-2} < R^2 a_{n-3} < \cdots \le R^{n-2} a_1$$

から、

$$a_n \le R^{n-1} a_1$$

となる。$\sum_{n=1}^{\infty} R_n$ は収束する$(0 < R < 1)$ので、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。

(2)　$1 < r$ であれば、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \text{すなわち} \quad a_{n+1} > a_n$$

よって、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する。

例 5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \quad (a > 0) \text{ の収束・発散を調べよ。}$$

$a_n = \frac{a^n}{n!}$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{a^n}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n+1}=0$$

よって、ダランベールの判定法より、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ は収束する。

➢ コーシーの判定式

定理 6（コーシー（Cauchy）の判定法）

正項級数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$において

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=r \quad (0\le r\le\infty)$$

であるとき、

(1)　$0\le r<1$ ならば、　$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束する。

(2)　$1<r\le\infty$ ならば、　$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は発散する。

証明

(1)　$r<R<1$ であるR をとると、

$$\sqrt[n]{a_n}<R \quad すなわち \quad a_n<R^n$$

このとき、$\sum_{n=1}^{\infty}R_n$ は収束する$(0<R<1)$ので、$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束する。

(2)　$1<r$ であれば、

$$\sqrt[n]{a_n}>1 \quad すなわち \quad a_n>1$$

よって、$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は発散する。

例 6

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$ **の収束・発散を調べよ。**

$a_n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n=\frac{1}{e}<1$$

よって、コーシーの判定法より、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ は収束する。

【問題集】

➢ 積分判定法

次の正項級数の収束・発散を調べよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n+1}}$

(5) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^2}$

(6) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\log n}}$

➢ 比較判定法

比較判定法を用いて次の正項級数の収束・発散を調べよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+2}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\log n}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\frac{\pi}{n}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2-n+1}$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n^2}$

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^2}$

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin^3 \frac{\pi}{\sqrt{n}}$

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\log(n+1)}$

(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - 2^n}$

(11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{3n^3 - n - 1}$

(12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n}$

(13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^2 - 3n + 2}{5n^4 - n - 3}$

(14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2n}$

(15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{6^n - 5^n}$

(16) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n^2 - n - 1}$

(17) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n - 3^n}$

(18) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

次を示せ

(19) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n^p}\right)$ は $p > 1$ のとき収束し、$p \leq 1$ のとき発散する。

➢ ダランベールの判定法、コーシーの判定法

次の級数の収束・発散を調べよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!}$ $(k$ は自然数$)$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-2}{2n+3}\right)^n$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^n}$

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}$

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 2\cdots n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-3}{3n+2}\right)^n$

(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+3}\right)^{n^2}$

(11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$

(12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^{n-1}}$

(13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\log n}{n}\right)^n$

(15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n-2}\right)^n$

(16) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{n^2}$

➢ 複合問題

次の級数の収束・発散を調べよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{2}-1\right)$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{3\cdot 6\cdots(3n)}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\log n}{\log(n+1)}$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an+b}{cn+d}\right)^n \qquad (a,b,c,d>0)$

【解答】

➢ 積分判定法

教科書 P.183 問 3

次の正項級数の収束・発散を調べよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$

例題 1 で$p=\frac{3}{2}$の場合なので、収束する。

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

例題 1 で$p=\frac{1}{2}$の場合なので、発散する。

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$

問 2 で$p=1$の場合なので、発散する。

教科書演習 P.176 問題 6.2

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n+1}}$

例題 1 で n を $n+1$ とすれば、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n+1}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$$

となり $p=\frac{4}{3}$の場合なので、収束する。

教科書演習 P.176 問題 6.4

(5) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^2}$

問 2 で$p=2$の場合なので、収束する。

(6) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\log n}}$

問 2 で$p=\frac{1}{2}$の場合なので、発散する。

➢ 比較判定法

教科書 P.184 問 4（演習に出題）

次の正項級数の収束・発散を調べよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+2}$

すべての n に対して

$$\frac{\sqrt{n}}{n^2+2}\leq\frac{\sqrt{n}}{n^2}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

が成り立つ。例題 1 より $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ は収束するから、与式は収束する。

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\log n}$

すべての n に対して

$$\frac{1}{\log n}\geq\frac{1}{n\log n}$$

が成り立つ。問 2 より $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$ は発散するから、与式は発散する。

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\frac{\pi}{n}$

すべての n に対して

$$\sin^2\frac{\pi}{n}\geq\left(\frac{\pi}{n}\right)^2=\pi^2\frac{1}{n^2}$$

が成り立つ。例題 1 より $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ は収束するから、与式は収束する。

教科書演習 P.177 例題 6.4

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2-n+1}$

すべての n に対して

$$\frac{n}{n^2-n+1}\leq\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}$$

が成り立つ。例題 1 より $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は発散するから、与式は発散する。

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n^2}$

すべての n に対して

$$\sin\frac{\pi}{n^2} \leq \frac{\pi}{n^2}$$

が成り立つ。例題 1 より $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ は収束するから、与式は収束する。

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^2}$

$\log x \leq \sqrt{x}\ \ (x \geq 1)$ だから、すべての n に対して、

$$\frac{\log n}{n^2} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

が成り立つ。例題 1 より $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ は収束するから、与式は収束する。

教科書演習 P.177 問題 6.5

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$

すべての n に対して

$$\frac{1}{(2n-1)^2} \leq \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4n^2}$$

が成り立つ。例題 1 より $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ は収束するから、与式は収束する。

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin^3\frac{\pi}{\sqrt{n}}$

すべての n に対して

$$\sin^3\frac{\pi}{\sqrt{n}} \leq \left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)^3 = \frac{\pi^3}{n^{\frac{3}{2}}}$$

が成り立つ。例題 1 より $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ は収束するから、与式は収束する。

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\log(n+1)}$

$\log x \leq \sqrt{x}\ \ (x \geq 1)$ だから、すべての n に対して、

$$\frac{1}{\sqrt{n}\log(n+1)} \geq \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} \geq \frac{1}{n+1}$$

が成り立つ。例題 1 より $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ は発散するから、与式も発散する。

教科書 P.185 問 6（演習に出題）

(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-2^n}$

$a_n=\dfrac{1}{3^n-2^n}$, $b_n=\dfrac{1}{3^n}$ とおくと、

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{3^n}{3^n-2^n}=\frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}\to 1\quad(n\to\infty)$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ は収束するから、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-2^n}$ も収束する。

(11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{3n^3-n-1}$

$a_n=\dfrac{2n+3}{3n^3-n-1}$, $b_n=\dfrac{1}{n^2}$ とおくと、

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{2n^3+3n^2}{3n^3-n-1}=\frac{2+3\frac{1}{n}}{3-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}\to\frac{2}{3}\quad(n\to\infty)$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ は収束するから、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{3n^3-n-1}$ も収束する。

(12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n}$

$a_n=\sin\dfrac{\pi}{n}$, $b_n=\dfrac{\pi}{n}$ とおくと、

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\to 1\quad(n\to\infty)$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n}$ は発散するから、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n}$ も発散する。

教科書演習 P.178 例題 6.5

(13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6n^2-3n+2}{5n^4-n-3}$

$a_n=\dfrac{6n^2-3n+2}{5n^4-n-3}$, $b_n=\dfrac{1}{n^2}$ とおくと、

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{6n^4 - 3n^3 + 2n^2}{5n^4 - n - 3} = \frac{6 - \frac{1}{n} + 2\frac{1}{n^2}}{5 - \frac{1}{n^3} - 3\frac{1}{n^4}} \to \frac{6}{5} \quad (n \to \infty)$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は収束するから、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^2 - 3n + 2}{5n^4 - n - 3}$ も収束する。

(14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2n}$

$a_n = \sin\dfrac{\pi}{2n}$, $b_n = \dfrac{\pi}{2n}$ とおくと、

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は発散するから、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2n}$ も発散する。

(15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{6^n - 5^n}$

$a_n = \dfrac{2^n}{6^n - 5^n}$, $b_n = \dfrac{2^n}{6^n}$ とおくと、

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{6^n}{6^n - 5^n} = \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{6^n}$ は収束するから、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{6^n - 5^n}$ も収束する。

教科書演習 P.178 問題 6.6（レポートに出題）

(16) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + 1}{3n^2 - n - 1}$

$a_n = \dfrac{2n + 1}{3n^2 - n - 1}$, $b_n = \dfrac{1}{n}$ とおくと、

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{2n^2 + n}{3n^2 - n - 1} = \frac{2 + \frac{1}{n}}{3 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} \to \frac{2}{3} \quad (n \to \infty)$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は発散するから、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + 1}{3n^2 - n - 1}$ も発散する。

(17) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n-3^n}$

$a_n=\dfrac{1}{5^n-3^n},\ \ b_n=\dfrac{1}{5^n}$ とおくと、

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{5^n}{5^n-3^n}=\frac{1}{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}\to 1\quad(n\to\infty)$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$ は収束するから、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n-3^n}$ も収束する。

(18) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$a_n=\log\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right),\ \ b_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ とおくと、

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\to 1\quad(n\to\infty)$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ は発散するから、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ も発散する。

教科書演習 P.179 例題 6.6

次を示せ

(20) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$ は $p>1$ のとき収束し、$p\leq 1$ のとき発散する。

$a_n=\log\left(1+\dfrac{1}{n^p}\right),\ \ b_n=\dfrac{1}{n^p}$ とおくと、

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{\log\left(1+\frac{1}{n^p}\right)}{\frac{1}{n^p}}\to 1\quad(n\to\infty)$$

よって、a_n と b_n の収束・発散は同時に起こる。

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ は、$p>1$ のとき収束し、$p\leq 1$ のとき発散するので、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ も同様。

➢ **ダランベールの判定法、コーシーの判定法**

教科書 P.187 問 7（演習に出題）

次の級数の収束・発散を調べよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$

$a_n=\frac{n}{2^n}$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^{n+1}}\cdot\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$$

よって、ダランベールの判定法より、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ は収束する。

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{n!}$　$\left(k\text{ は自然数}\right)$

$a_n=\frac{n^k}{n!}$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^k}{(n+1)!}}{\frac{n^k}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k}{n^k}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^k\cdot\frac{1}{n+1}=0$$

よって、ダランベールの判定法より、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ は収束する。

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$

$a_n=\frac{n^n}{n!}$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{n+1}=e>1$$

よって、ダランベールの判定法より、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ は発散する。

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-2}{2n+3}\right)^n$

$a_n=\left(\frac{3n-2}{2n+3}\right)^n$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}}{2+\frac{3}{n}}=\frac{3}{2}>1$$

よって、コーシーの判定法より、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ は発散する。

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{1}}{(\log \boldsymbol{n})^{\boldsymbol{n}}}$

$a_n=\frac{1}{(\log n)^n}$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}=0$$

よって、コーシーの判定法より、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ は収束する。

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}+\mathbf{2}}\right)^{\boldsymbol{n}^2}$

$a_n=\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}$ **とおくと、**

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1+\frac{2}{n}}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}^2=\frac{1}{e^2}<1$$

よって、コーシーの判定法より、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ は収束する。

教科書演習 P.179 例題 6.7

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{n}}}$

$a_n=\frac{n!}{n^n}$ **とおくと、**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{(n+1)!}{n!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot(n+1)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n=\frac{1}{e}<1$$

よって、ダランベールの判定法より、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ は収束する。

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 2\cdots n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$

$a_n=\frac{1\cdot 2\cdots n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1\cdot 2\cdots n\cdot(n+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot(2n+1)}}{\dfrac{1\cdot 2\cdots n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{n}}{2+\dfrac{1}{n}}=\frac{1}{2}<1$$

よって、ダランベールの判定法より、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ は収束する。

教科書演習 P.180 例題 6.8

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-3}{3n+2}\right)^n$

$a_n=\left(\frac{4n-3}{3n+2}\right)^n$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n-3}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\dfrac{3}{n}}{3+\dfrac{2}{n}}=\frac{4}{3}>1$$

よって、コーシーの判定法より、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ は発散する。

(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+3}\right)^{n^2}$

$a_n=\left(\frac{n}{n+3}\right)^{n^2}$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+3}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1+\dfrac{3}{n}}\right)^{\frac{n}{3}}\right\}^3=\frac{1}{e^3}<1$$

よって、コーシーの判定法より、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ は収束する。

教科書演習 P.180 問題 6.7（レポートに出題）

(11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$

$a_n = \frac{2^n}{n^2}$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}\cdot\frac{2^{n+1}}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2\cdot 2 = 2$$

よって、ダランベールの判定法より、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ は発散する。

(12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^{n-1}}$

$a_n = \frac{n!}{3^{n-1}}$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{3^n}}{\frac{n!}{3^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}}{3^n}\cdot\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot(n+1) = \infty$$

よって、ダランベールの判定法より、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ は発散する。

(13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\{(n+1)!\}^2}{\{2(n+1)\}!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\{(n+1)!\}^2}{(n!)^2}\cdot\frac{(2n)!}{\{2(n+1)\}!}$$

$$= \lim_{n\to\infty}(n+1)^2\cdot\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{4} < 1$$

よって、ダランベールの判定法より、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ は収束する。

教科書演習 P.180 問題 6.8

(14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\log n}{n}\right)^n$

$a_n = \left(\frac{\log n}{n}\right)^n$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$$

よって、コーシーの判定法より、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ は収束する。

(15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n-2}\right)^n$

$a_n=\left(\frac{2n-1}{3n-2}\right)^n$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n}}=\frac{2}{3}<1$$

よって、コーシーの判定法より、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ は収束する。

(16) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{n^2}$

$a_n=\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{n^2}$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\frac{2}{n}}{1-\frac{1}{n}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{n}{-2}}\right)^{-\frac{n}{2}}\right\}^{-2}}{\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{n}{-1}}\right)^{-n}\right\}^{-1}}$$

$$=\frac{e^{-2}}{e^{-1}}=\frac{1}{e}<1$$

よって、コーシーの判定法より、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ は収束する。

➢ 複合問題

教科書演習 P.196 演習問題 6-A 1.

(19) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$\log n\leq\sqrt{n}\ (x\geq 1)$ だから、すべての n に対して、

$$0\leq\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{n}=\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}\to 0\quad(n\to\infty)$$

よって、収束する。

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{2}-1\right)$

$\sqrt[n]{2}=2^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\log 2}$ とかける

$x>0$ で $e^x>x+1$ であるから

$$\sqrt[n]{2}=e^{\frac{1}{n}\log 2}>\frac{1}{n}\log 2+1$$

$$\sqrt[n]{2}-1>\frac{1}{n}\log 2$$

ここで、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\log 2=\log 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は発散するので、$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{2}-1\right)$ も発散する

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{3\cdot 6\cdots(3n)}$

$a_n=\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{3\cdot 6\cdots(3n)}$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)(2n+1)}{3\cdot 6\cdots(3n)(3n+3)}\frac{3\cdot 6\cdots(3n)}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}$$

$$=\frac{2n+1}{3n+3}=\frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{3}{n}}\to\frac{2}{3}<1\qquad(n\to\infty)$$

よって、ダランベールの判定法より、$\sum_{n=1}^{\infty}a^n$ は収束する。

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\log n}{\log(n+1)}$

$$a_n=\frac{\log n}{\log(n+1)}=\frac{\log n}{\log n\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{\log n}{\log n+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{1+\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}}=1$$

交代級数が収束するためには$\{a_n\}$ が 0 に収束する必要があるので、

$\sum_{n=1}^{\infty}a^n$ は発散する。

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$

$n\geq 1$ において $\sqrt[n]{2}-1<\sqrt[n]{n}-1$ であり、(2)より$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{2}-1\right)$ は発散するので、

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$ も発散する。

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an+b}{cn+d}\right)^n\qquad(a,b,c,d>0)$

$a_n = \left(\frac{an+b}{cn+d}\right)^n$ とおくと、

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{an+b}{cn+d} \to \frac{a}{c}$$

よって、$a \geq c$ のとき、発散し、$a < c$ のとき収束する。