第９回 無限級数(2)

今回のポイント

1. 絶対収束級数・条件収束級数
2. 整級数と収束半径
3. 整級数展開

6.3 絶対収束級数・条件収束級数

➢ 交代級数

$a_n a_{n+1} < 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$ のとき、(つまり、隣り合う項の符号が逆)
級数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$を**交代級数**という。

定理8 (ライプニッツ(Leibniz)の定理)

$0 \leq a_{n+1} \leq a_n$ で $a_n \to 0 \ (n \to \infty)$ ならば、

交代級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 - \cdots + (-1)^{n-1} a_n + \cdots$$

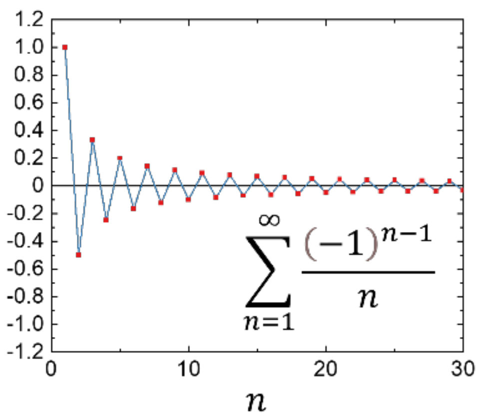
は収束する。

例 7

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$\left\{\frac{1}{n}\right\}$は単調減少で0に収束するので、

定理8より収束する。(右図)



➢ 絶対収束級数・条件収束級数

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$が収束するとき、級数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$は**絶対収束する**という。
絶対収束する級数(絶対収束級数)は収束するが、逆は必ずしも成り立たない。
収束するが、絶対収束しないとき、**状態収束する**という。

定理 9

$$級数\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ は絶対収束すれば収束する。}$$

問 8

次の級数について、絶対収束か条件収束かを調べよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} \text{とおくと、} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

となり、これは教科書 P.183 例題 1 より収束する。よって、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$は絶対収束する。

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

$a_n = \frac{1}{2n+1}$とおくと、$\{a_n\}$は減少数列で、$a_n \to 0\ (n \to \infty)$したがって、$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$は収束する。一方、

$a_n = \dfrac{1}{2n+1} \geq \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n+1}$であり、$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+1}$は発散するから$a_n$は発散する。

したがって、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$は条件収束する。

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$

$\left\{\frac{1}{\log n}\right\}$は減少数列で、$\frac{1}{\log n} \to 0\ (n \to \infty)$ したがって、$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$は収束する。一方、

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log n}$は発散する。したがって、$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$は条件収束する。

定理 10

(1) 絶対収束級数は項の順序を変えても絶対収束して、その和は変わらない。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$、$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が絶対収束するとき、それらの項のすべての積$a_i b_j$を任意の順序で並べてできる級数$\sum a_i b_j$ も絶対収束して、

$$\sum a_i b_j = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

6.4 整級数

➢ 整級数（べき級数）

一般項が関数$f(x,y)$である級数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$を**関数項級数**という。
特に、$f_n(x) = a_n x^n \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$ であるとき、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

を**整級数**（べき級数）という。
例

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

定理 11
(1) 整級数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$は $x = x_0\ (\neq 0)$ で収束すれば、
$|x| < |x_0|$ である全ての x に対して絶対収束する。
(2) 整級数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$は $x = x_0$ で発散すれば、
$|x| > |x_0|$ である全ての x に対して発散する。

➢ 整級数の収束半径

整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ に対して

$$r = \sup\left\{|x|;\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ が収束}\right\} \quad (0 \leq r \leq \infty)$$

をこの級数の**収束半径**という。sup は上限を表す数学記号。

定理 12（収束半径の性質）
整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径をrとすると、r は次のいずれかになる。
(1) $0 < r < \infty$ ならば$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は
$|x| < r$ で収束（絶対収束）
$r < |x|$ で発散
(2) $r = 0$ ならば、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ はすべての$x \neq 0$ に対して発散
(3) $r = \infty$ ならば、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ はすべてのx に対して収束

整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が収束するような x の集合をこの整級数の**収束域**という。

例 9

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \text{ は } |x| < 1 \text{ のとき収束し、} |x| > 1 \text{ のとき発散するから収束半径は } 1$$

また、$x = \pm 1$ で発散するので、収束域は$(-1,1)$である。

定理 13（収束半径の性質）

整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径をrとすると、

$$(1)\quad \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = r \quad \text{または} \quad (2)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = r$$

例題2

次の整級数の収束半径と収束域を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$

$a_n = n$とおくと、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$

であるから、収束半径は$\underline{1}$

また、$x = \pm 1$ で$nx^n \nrightarrow 0$ だからこの整級数は発散、収束域は$(-1,1)$である。

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

$a_n = \dfrac{1}{n}$とおくと、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$

であるから、収束半径は$\underline{1}$

また、$x = 1$ のとき発散、$x = -1$ のとき収束するので、収束域は$[-1, 1)$である。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n x^n$

$a_n = \left(\dfrac{2n+1}{3n+1}\right)^n$ とおくと、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{2n+1}\right) = \frac{3}{2}$

であるから、収束半径は$\underline{\frac{3}{2}}$

また、$x = \pm\frac{3}{2}$ で$|a_n x^n| > 0$ だからこの整級数は発散、収束域は$\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ である。

定理 14

整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を$r > 0$とし、

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (|x| < r)$ とする。

(1) 関数$f(x)$ は区間$(-r, r)$ で連続である。

(2) （項別積分の定理）　$-r < x < r$ に対して

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

(3) （項別微分の定理）　$f(x)$ は区間$(-r, r)$ で微分可能で、

$$\boldsymbol{f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}}$$

※ この定理の意味は、関数$f(x)$ が整級数で展開できるとき、その積分（微分）はa_nはそのままに各項のx^nの積分（微分）の和で書き表せるということ。

関数の整級数展開

では、次にその整級数での展開を見ていこうとおもうが、これはマクローリン展開に他ならない。

定理 15

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (|x| < r) \quad ならば、\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

例題3

次の整級数展開が成り立つことを示せ。

(1) 一般の2項定理

任意の実数 α に対して

$$(1+x)^{\alpha} = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} x^1 + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + \cdots \qquad (|x| < 1)$$

ただし、

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad (n \neq 0),\ \binom{\alpha}{1} = 1$$

(2)

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \qquad (|x| < 1)$$

証明

(1)　$a_n = \binom{\alpha}{n}$とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}\frac{(n+1)!}{n!}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right| = |-1| = 1$$

となり、収束半径は1、そこで、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$$

とおくと、項別微分の定理より、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}nx^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^{n} \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} (1+x)f'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{n!}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{n(n-1)!}x^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n} \\ &= \alpha + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}\left(\frac{\alpha-n}{n}+1\right)x^n \\ &= \alpha + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}\left(\frac{\alpha}{n}\right)x^n \\ &= \alpha + \alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \\ &= \alpha\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\right) \\ &= \alpha\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\right) = \alpha f(x) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha}{1+x}$$

この両辺を0からxまで積分すると、

$$\log|f(x)| = \alpha\log(1+x)$$
$$f(x) = \pm(1+x)^{\alpha}$$

ここで $f(0)=1$ であるから、$f(x)=(1+x)^{\alpha}$ となる。

(2)　$|x|<1$ のとき(1) で$\alpha=-1$ とおくと

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+(-1)^n x^n+\cdots$$

さらに$x\to x^2$ とすれば

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}+(-1)^n x^{2n}+\cdots$$

となる。ここで、

$$(\tan^{-1}x)'=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}+(-1)^n x^{2n}+\cdots$$

であるから、この両辺を積分すると、項別積分の定理より、

$$\tan^{-1}x=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots++(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$$

となり、題意を示した。

【問題集】

➢ 絶対収束と条件収束

次の級数について絶対収束か条件収束かを調べよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\qquad (p>0)$

(4) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\log n}$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n^2}$

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n\sin n}{n!}$

➢ 整級数の収束半径と収束域

次の整級数の収束半径と収束域を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^n x^n$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2)!}{2n!}x^n$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})x^n$

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n}$

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}x^n$

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n x^n$

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}$

(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n x^n$

(11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log(n+2)}x^n$

(12) 整級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ の収束半径を ρ とすると、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{2n}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{2n+1}$ の収束半径は $\sqrt{\rho}$ であることを示せ。また、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^{2n}$ の収束半径を求めよ。

次の整級数の収束半径を求めよ。

(13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n(n+1)}x^{2n}$

(14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^{2n-1}$

(15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}$

➢ 整級数展開

次の整級数展開が成り立つをことを示せ。

(1) $\displaystyle\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots \qquad (|x|<1)$

(2) $$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\cdots$$
$$+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}x^n+\cdots \qquad (|x|<1)$$

(3) $\displaystyle\sin^{-1}x=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots \qquad (|x|<1)$

(4) $\sinh x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$

(5) $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}\dfrac{x^2}{4} + \cdots + (-1)^n \dfrac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)} \dfrac{x^n}{2n} + \cdots \qquad (|x| < 1)$

(6) $\sqrt{1-x^2} = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}\dfrac{x^4}{4} + \cdots - \dfrac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)} \dfrac{x^{2n}}{2n} + \cdots \qquad (|x| < 1)$

(7) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \cdots + \dfrac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} x^{2n} + \cdots \qquad (|x| < 1)$

【解答】

➢ 絶対収束と条件収束

次の級数について絶対急速課条件収束かを調べよ。

教科書演習 P.182 例題 6.9

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

$a_n=\dfrac{1}{n}$ とする。$\{a_n\}$ は単調減少で $a_n\to 0\ (n\to\infty)$ であるから

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ は収束する。また、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$
は発散するので、与式は条件収束する。

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$

$a_n=\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ とする。$\{a_n\}$ は単調減少で $a_n\to 0\ (n\to\infty)$ であるから

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ は収束する。また、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$
は収束するので、与式は絶対収束する。

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\qquad (p>0)$

$a_n=\dfrac{1}{n^p}$ とする。$\{a_n\}$ は単調減少で $a_n\to 0\ (n\to\infty)$ であるから

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ は収束する。また、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$
は $p>1$ で収束し、$0<p\le 1$ で発散する。
したがって、$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$は、$p>1$ で絶対収束し、$0<p\le 1$ で条件収束する。

教科書演習 P.182 問題 6.9

(1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\log n}$

$\frac{1}{n\log n}$ は減少数列で 0 に収束するから交代級数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\log n}$ は収束する。

$\frac{1}{n\log n}\ge\frac{1}{n}$ で$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ は発散するので、$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$ も発散する。

よって、$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n}$ は条件収束。

(2) $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin \frac{1}{n^2}$

$a_n = (-1)^{n-1} \sin \frac{1}{n^2}$ とする。$|a_n| = \sin \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ で

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は収束するから、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束。

(3) $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n \sin n}{n!}$

$a_n = \frac{e^n \sin n}{n!}$ とする。$|a_n| = \left|\frac{e^n \sin n}{n!}\right| \leq \frac{e^n}{n!}$ である。

$b_n = \frac{e^n}{n!}$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{(n+1)} = 0 < 1$$

よって、、$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する。よって、$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束するから$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束。

➢ 整級数の収束半径と収束域

教科書 P.192 問 10（演習に出題）

次の整級数の収束半径と収束域を求めよ。

(1) $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$a_n = \frac{1}{n!}$とおくと、$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$

であるから、収束半径は∞、収束域は$(-\infty, \infty)$である。

(2) $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

$a_n = n^n$とおくと、$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$

であるから、収束半径は1収束域は$\{0\}$である。

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n$

$a_n = \dfrac{2^n}{n^2}$とおくと、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}$

であるから、収束半径は$\underline{\frac{1}{2}}$

また、$x = \pm\frac{1}{2}$で$a_n x^n = \frac{1}{n^2}$だからこの整級数は収束するが、

$x < -\dfrac{1}{2}$もしくは$\dfrac{1}{2} < x$で$a_n x^n$は発散する。よって、収束域は$\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$である。

教科書 P.196 演習問題 6-A 2.（レポートに出題）

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2)!}{2n!}x^n$

$a_n = \dfrac{(n^2)!}{2n!}$とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2)!}{2n!}\frac{\{2(n+1)\}!}{\{(n+1)^2\}!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2)!}{\{(n+1)^2\}!}\frac{\{2(n+1)\}!}{2n!}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2\{(n+1)^2-1\}\cdots(n^2+1)} = 0$$

であるから、収束半径は$\underline{0}$、収束域は$\{0\}$である。

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)x^n$

$a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)}{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1}} = \frac{1+1}{1+1} = 1$$

であるから、収束半径は$\underline{1}$、

$x=1$のとき、

$$a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\to 0\quad (n\to\infty)$$

であるから、発散するが、$x=-1$のときは収束する。よって、収束域は$[-1,1)$である。

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n}$

$a_n=\dfrac{1}{2^n}$とおくと、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}=\lim_{n\to\infty}(2)=2$

であるから、$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ の収束半径は 2 となる。すなわち$|x|<2$ のとき収束するので、

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x^2)^n$$

は、$|x^2|<2$ で収束する。すなわち$|x|<\sqrt{2}$ のとき収束する。

また、$x=\pm\sqrt{2}$ で$a_nx^{2n}=1$ だから、収束域は$\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$である。

教科書演習 P.192 例題 6.16

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}x^n$

$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$とおくと、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}=1$

であるから、$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ の収束半径は$\underline{1}$ となる。

また、$x=-1$ のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ となって発散する。

したがって、収束域は、$\underline{(-1,1]}$

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n x^n$

$a_n=\left(\dfrac{n+2}{2n+1}\right)^n$ とおくと、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+2}=2$

であるから、$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ の収束半径は$\underline{2}$ となる。

また、$x=\pm 2$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n x^n| = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+4}{2n+1}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{3}{2n+1}\right)^n$$

となるので、発散する。したがって、収束域は、$\underline{(-2,2)}$

教科書演習 P.192 問題 6.16

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}$

$a_n = \dfrac{1}{(2n)!}$ とおくと、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty}(2n+2)(2n+1) = \infty$

であるから、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径は∞ となる。したがって、収束域は、$\underline{(-\infty,\infty)}$

(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n x^n$

$a_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$ とおくと、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$

であるから、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径は$\underline{1}$ となる。

また、$x = +1$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n(1)^n| = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \to \frac{1}{e} \quad (n\to\infty)$$

となるので、発散する。

また、$x = -1$ のとき $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n(-1)^n|$ は発散する。

したがって、収束域は、$\underline{(-1,1)}$

(11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log(n+2)}x^n$

$a_n = \dfrac{(-1)^n}{\log(n+2)}$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+3)}{\log(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\log n\left(1+\frac{3}{n}\right)}{\log n\left(1+\frac{2}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\log n + \log\left(1+\frac{3}{n}\right)}{\log n + \log\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{\log\left(1+\frac{3}{n}\right)}{\log n}}{1+\dfrac{\log\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\log n}} = 1$$

であるから、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径は$\underline{1}$ となる。

また、$x = +1$ のとき$\left\{\dfrac{(-1)^n}{\log(n+2)}\right\}$は単調減少で 0 に収束するから、

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^n}{\log(n+2)}\right\}$は収束。

また、$x = -1$ のとき $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\log(n+2)}\right\}$ は発散する。

したがって、収束域は、$\underline{(-1, 1]}$

教科書 P.196 演習問題 6-A 3.（レポートに出題）

(12) 整級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を ρ とすると、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n+1}$ の収束半径は $\sqrt{\rho}$ であることを示せ。また、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^{2n}$ の収束半径を求めよ。

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径はρ となる。

すなわち$|x| < \rho$のとき収束し、$|x| > \rho$のとき発散するので、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x^2)^n$$

は、$|x^2| < \rho$ で収束する。

すなわち$|x| < \sqrt{\rho}$ のとき収束し、$|x| > \sqrt{\rho}$のとき発散する。

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n+1} = x\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x^2)^n$$

も同様に$|x| < \sqrt{\rho}$ のとき収束し、$|x| > \sqrt{\rho}$のとき発散する。

$a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\frac{(2n+2)!}{\{(n+1)!\}^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\right) = 4$$

であるから、収束半径は$\sqrt{4} = \underline{2}$

教科書演習 P.193 例題 6.18

次の整級数の収束半径を求めよ。

(13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n(n+1)}x^{2n}$

$a_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n(n+1)}$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+2)}{2^n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} 2\frac{n+2}{n+1} = 2$$

であるから、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径は2となるので、

(12)より、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}$の収束半径は$\underline{\sqrt{2}}$ となる。

教科書演習 P.193 問題 6.17

(14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^{2n-1}$

$a_n = \dfrac{2^n}{n^2}$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n^2}\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

であるから、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径は$\frac{1}{2}$となるので、

(12)より、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}$の収束半径は$\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ となる。

(15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}$

$a_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} = \lim_{n\to\infty}(2n+3)(2n+1) = \infty$$

であるから、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径は∞となるので、

(12)より、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}$の収束半径は$\underline{\infty}$ となる。

➢ 整級数展開

教科書 P.194 問 11（演習に出題）

次の整級数展開が成り立つをことを示せ。

(1) $\displaystyle \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots \qquad (|x|<1)$

$|x|<1$ のとき 2 項展開の式で$\alpha = -1$ とおくと

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + (-1)^n x^n + \cdots$$

となる。ここで、

$$(\log(1+x))' = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \cdots$$

であるから、この両辺を積分すると、項別積分の定理より、

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$$

となり、題意を示した。

(2) $$\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2 - \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3 - \cdots}$$

$$\boldsymbol{+(-1)^n\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}x^n + \cdots \qquad (|x|<1)}$$

$|x|<1$ のとき2 項展開の式で$\alpha = -\frac{1}{2}$とおくと

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \binom{-\frac{1}{2}}{0} + \binom{-\frac{1}{2}}{1}x^1 + \binom{-\frac{1}{2}}{2}x^2 + \cdots + \binom{-\frac{1}{2}}{n}x^n + \cdots \qquad (|x|<1)$$

ここで、$n=1$ のとき

$$\binom{-\frac{1}{2}}{1} = 1$$

また、$n \geq 1$ のとき、

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{(2n-1)}{2}\right)}{n!} = \frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2^n\{1\cdot2\cdot\cdots(n)\}}$$

$$= (-1)^n\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}$$

したがって、

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2 - \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3 + \cdots + (-1)^n\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}x^n + \cdots$$

となる。

(3) $$\boldsymbol{\sin^{-1}x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \qquad (|x|<1)}$$

$|x|<1$ のとき2 項展開の式で$\alpha = -\frac{1}{2}$とおくと前問より

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\cdots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}x^n+\cdots$$

となる。さらに$x\to x^2$ とすれば

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4-\cdots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}x^{2n}+\cdots$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}(\sin^{-1}x)'&=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\\&=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4-\cdots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}x^{2n}+\cdots\end{aligned}$$

この両辺を積分すると、項別積分の定理より、

$$\sin^{-1}x=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt=x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$$

となり、題意を示した。

教科書 P.196 演習問題 6-A 4. （レポートに出題）

(4) $\boldsymbol{\sinh x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots\qquad(-\infty<x<\infty)}$

$\sinh x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ である。$-\infty<x<\infty$ にたいして、

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

両辺を差し引きして 2 で割ると、

$$\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots\qquad(-\infty<x<\infty)$$

となる。

教科書演習 P.197 例題 6.23

(5) $\boldsymbol{\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\frac{x^2}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)}\frac{x^n}{2n}+\cdots\qquad(|x|<1)}$

$|x|<1$ のとき2 項展開の式で$\alpha=\frac{1}{2}$ とおくと

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \binom{\frac{1}{2}}{0} + \binom{\frac{1}{2}}{1}x^1 + \binom{\frac{1}{2}}{2}x^2 + \cdots + \binom{\frac{1}{2}}{n}x^n + \cdots \qquad (|x|<1)$$

ここで、$n=1$ のとき

$$\binom{\frac{1}{2}}{1} = 1$$

また、$n \geq 1$ のとき、

$$\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(-\frac{(2n-3)}{2}\right)}{n!} = (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n\{1\cdot 2 \cdot\cdot \cdots (n)\}}$$

$$= (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)}\frac{1}{2n}$$

したがって、

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{4} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^3}{6} - \cdots + (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)}\frac{x^n}{2n} + \cdots$$

となる。

教科書演習 P.197 問題 6.22

(6) $$\boldsymbol{\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\frac{x^4}{4} + \cdots - \frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)}\frac{x^{2n}}{2n} + \cdots \qquad (|x|<1)}$$

(5)において x を$-x^2$ に置き換えると

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\frac{x^4}{4} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^6}{6} - \cdots + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)}\frac{x^{2n}}{2n} + \cdots$$

(7) $$\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}x^{2n} + \cdots \qquad (|x|<1)}$$

(2)において x を$-x^2$ に置き換えると

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}x^{2n} + \cdots$$